ALGEBRĂ LINEARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ

Valeriu Zevedei, Ionela Oancea

April 9, 2005

CUPRINS

CAPITOLUL 1

CALCUL VECTORIAL

1.1 Vectori legaţi, vectori liberi

Presupunem cunoscute noţiunile fundamentale ale geometriei elementare. Spaţiul geometriei elementare este alcătuit din puncte pe care le vom nota prin litere latine mari A, B, C,.... Alte submulţimi importante sunt dreptele şi planele.

Definiţia 1.1.1 *Se numeşte vector legat un segment de lungime dată orientat în spaţiu prin direcţie şi sens, adică un segment la care unul din capete se alege ca punct de plecare şi se numeşte origine a vectorului legat, iar celălalt capăt ca punct de sosire şi se numeşte extremitate a vectorului legat.*

Vectorul legat a cărui origine este punctul A şi a cărui extremitate este punctul B va fi notat $\overrightarrow{AB}$. In figuri vectorul legat se reprezintă prin segmentul respectiv cu săgeată în extremitate. Un vector legat este determinat când se cunosc originea şi extremitatea sa. Se consideră vectorul a cărui extremitate coincide cu originea sa şi se numeşte *vectorul legat nul*; direcţia şi sensul său sunt nedeterminate.

Doi vectori legaţi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$ se consideră egali şi scriem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ dacă şi numai dacă originile şi extremităţile lor sunt identitce: $A \equiv A'$ şi $B = B'$.

Lungimea vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ exprimată într-o anumită unitate de lungime se notează $|\overrightarrow{AB}|$ şi se numeşte *mărimea sau modulul vectorului* $\overrightarrow{AB}$. Dacă mărimea unui vector în unitatea de lungime u este m, în unitatea $u' = Lu$ mărimea aceluiaşi vector

este $m' = Lm$. Din acest motiv se zice că dimensiunea fizică a mărimii unui vector legat este L.

Definiţia 1.1.2 *Doi vectori legaţi $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ se numesc echipolenţi şi scriem $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ dacă sau sunt ambii nuli sau au aceeaşi mărime şi aceeaşi orientare (direcţie şi sens).*

Relaţia de echipolenţă este o veritabilă relaţie de echivalenţă în mulţimea vectorilor legaţi, adică are următoarele proprietăţi:

- reflexivitate: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$;
- simetrie: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$;
- transitivitate $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Mulţimea vectorilor legaţi se împarte în clase de vectori echipolenţi: orice doi vectori legaţi echipolenţi intră în aceeaşi clasă şi vectori legaţi din clase diferite sunt neechipolenţi. Doi vectori legaţi echipolenţi diferă numai prin originea lor. De multe ori, poziţia originii nu prezintă importanţă, esenţiale fiind lungimea şi orientarea vectorului. De exemplu, mişcarea de translaţie a unui corp rigid este determinată de oricare din vectorii legaţi având ca origine poziţia iniţială a unui punct al corpului şi ca extremitate poziţia finală a aceluiaşi punct. Evident, toţi aceşti vectori legaţi sunt echipolenţi între ei. Se ajunge astfel la noţiunea de vector liber.

Definiţia 1.1.3 *Prin vector liber se înţelege clasa tuturor vectorilor legaţi echipolenţi cu unul dat.*

Mărimea unui vector liber este mărimea unuia dintre vectorii legaţi care îl determină, deci se exprimă în unităţi de lungime; orientarea unui vector liber este orientarea unuia dintre vectorii legaţi care îl determină. Vom nota vectorii liberi prin litere latine mici cu săgeată deasupra $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, etc. Vectorul liber nul, adică clasa tuturor vectorilor legaţi nuli, se va nota prin $\overrightarrow{0}$ sau chiar mai simplu prin 0, fără a avea motiv de confuzie. Egalitatea $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ are loc dacă şi numai dacă $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ notează acelaşi vector liber.

Dat fiind că vectorul legat $\overrightarrow{AB}$ determină complet vectorul liber $\overrightarrow{a}$-clasa căruia el aparţine- în locul relaţiei de apartenenţă $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{a}$ se scrie pur şi simplu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$. De

asemenea în locul relaţie de echipolenţă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ se scrie simplu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ înţelegând-o ca egalitate între vectori liberi. Cu alte cuvinte, echipolenţa se asimilează totdeauna cu egalitatea.

Dacă toţi vectorii legaţi aparţin unui plan, atunci prin vector liber în acel plan se înţelege clasa vectorilor legaţi echipolenţi în acest plan. La fel se consideră şi vectorii liberi pe o dreaptă. Vectorul liber pe o dreaptă se mai numeşte uneori şi *vector alunecător*.

Fiind dat un vector liber $\overrightarrow{a}$, (adică fiind dat un vector legat care-l determină), oricare ar fi punctul A, există un singur punct B astfel ca vectorul legat $\overrightarrow{AB}$ să aparţină vectorului liber $\overrightarrow{a}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$. Operaţia de construire a vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ se numeşte *dispunerea sau construirea vectorului liber* $\overrightarrow{a}$ în punctul A. Vom nota şi $B = A + \overrightarrow{a}$ în loc de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$.

Dacă vectorul legat $\overrightarrow{AB}$ determină vectorul liber $\overrightarrow{a}$, vectorul liber determinat de $\overrightarrow{BA}$ se numeşte *opusul lui* $\overrightarrow{a}$ şi se va nota $-\overrightarrow{a}$, adică: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{a}$.

Doi vectori legaţi se numesc *colineari* dacă ei sunt situaţi pe aceeaşi dreaptă sau pe drepte paralele; în caz contrar se numesc *necolineari*. Vectorii liberi corespunzători se numesc de asemenea colineari respectiv necolineari.

Mai mulţi vectori legaţi situaţi pe drepte paralele cu acelaşi plan se numesc *coplanari*; în caz contrar se numesc *necoplanari*. Vectorii liberi corespunzători se numesc de asemenea coplanari, respectiv necoplanari.

De aici înainte vom spune simplu vector, fără a preciza dacă acesta este legat sau liber, aceasta reieşind din context.

1.2 Operaţii lineare cu vectori

1.2.1 Adunarea vectorilor

Definiţia 1.2.1 *Fie* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *doi vectori oarecare. Fie* O *un punct oarecare şi* $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ *vectorul* $\overrightarrow{a}$ *dispus în* O, $A = O + \overrightarrow{a}$; *fie* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ *vectorul* $\overrightarrow{b}$ *dispus în* A, $B = A + \overrightarrow{b}$. *Vectorul* $\overrightarrow{OB}$, *care uneşte originea primului vector cu extremitatea celui de al doilea, se numeşte suma celor doi vectori legaţi* $\overrightarrow{OA}$ *şi* $\overrightarrow{AB}$ *şi scriem* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$. *Vectorul liber* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OB}$ *se numeşte suma vectorilor* $\overrightarrow{a}$ *şi* $\overrightarrow{b}$ *şi scriem* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

Avem

$$A = O + \overrightarrow{a} \quad \wedge \quad B = A + \overrightarrow{b} \Rightarrow B = O + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

sau

$$(O + \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{b} = O + (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}).$$

Suma a doi vectori necolineari poate fi definită şi altfel:

Fie $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{b}$ vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ dispuşi în punctul O şi $OABC$ paralelogramul construit pe $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OC}$ ca laturi. Vectorul $\overrightarrow{OB}$, diagonala paralelogramului dusă din O, este suma vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

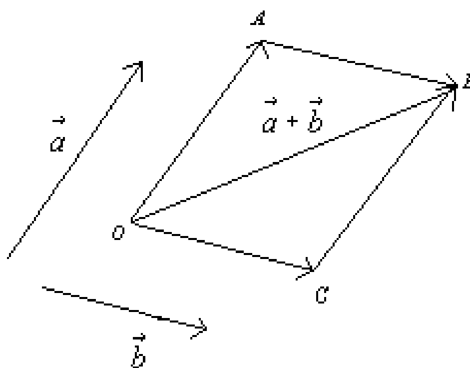


Fig. 1.1: Suma a doi vectori

Fig. 1.2: Adunarea vectorilor

Se observă că suma vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ este bine definită, cu alte cuvinte, alegând puncte iniţiale O diferite obţinem vectori $\overrightarrow{OB}$ echipolenţi, adică acelaşi vector liber.

Prima definiţie a sumei celor doi vectori se numeşte *regula triunghiului*, iar a doua- *regula paralelogramului*. Pentru amândouă este suficient să ne gândim la compunerea

mişcărilor de translaţie ale unui corp rigid.

Din definiţie, rezultă că suma a doi vectori liberi este comutativă:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.$$

Noţiunea de sumă a vectorilor se poate generaliza pentru orice număr finit de vectori. De exemplu, fie daţi trei vectori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Se construieşte iniţial suma $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, apoi i se adaugă vectorul $\overrightarrow{c}$, obţinându-se vectorul $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$,

$$O + \overrightarrow{a} = A, A + \overrightarrow{b} = B, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, B + \overrightarrow{c} = C, \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}.$$

Se observă că acelaşi vector $\overrightarrow{OC}$ se obţine dacă se adaugă vectorului $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ vectorul $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. Deci adunarea vectorilor este asociativă

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}).$$

Aceasta ne permite să scriem simplu $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ în loc de $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ sau de $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$. Se observă că suma $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ se poate construi şi astfel:

In punctul O se dispune vectorul $\overrightarrow{a}$, $O + \overrightarrow{a} = A$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$; în A se dispune vectorul $\overrightarrow{b}$, $A + \overrightarrow{b} = B$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$; în B se dispune vectorul $\overrightarrow{c}$, $B + \overrightarrow{c} = C$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c}$. Vectorul care uneşte originea primului vector cu extremitatea ultimului vector este vectorul sumă. Această regulă se generalizează pentru orice număr finit de vectori şi se numeşte *regula poligonului închis*.

Diferenţa a doi vectori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ este vectorul $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ a cărui sumă cu vectorul scăzător $\overrightarrow{b}$ dă vectorul $\overrightarrow{a}$. Deci $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$. Din definiţia sumei a doi vectori rezultă construcţia vectorului diferenţă: în acelaşi punct O se dispun vectorii $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$. Vectorul $\overrightarrow{BA}$ care uneşte extremitatea vectorului scăzător $\overrightarrow{OB}$ cu extremitatea vectorului descăzut $\overrightarrow{OA}$ este vectorul diferenţă $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. In adevăr, după definiţia sumei avem $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ sau $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}$.

Dacă pe vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ dispuşi în punctul O construim paralelogramul $OACB$, atunci diagonala $\overrightarrow{OC}$ este suma $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, iar cealaltă diagonală $\overrightarrow{BA}$ este diferenţa $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. Se observă că diferenţa $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ se poate scrie şi sub forma sumei $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$ între vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $-\overrightarrow{b}$, ultimul fiind opusul lui $\overrightarrow{b}$. Deci, ca şi pentru numere, suma şi diferenţa a doi vectori pot fi înglobate într-o singură operaţie - adunarea vectorilor.

Să observăm că adunarea vectorilor are următoarele proprietăţi:

- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ este comutativă;
- $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ este asociativă;
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ vectorul nul este element neutru;
- $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ orice vector are un opus.

  Aceste proprietăţi ne îndreptăţesc să afirmăm că mulţimea vectorilor liberi înzestrată cu operaţia de adunare are o structură de grup comutativ (abelian).

1.2.2 Inmulţirea vectorilor cu numere (scalari)

Definiţia 1.2.2 *Fie vectorul $\overrightarrow{a}$ şi numărul real λ. In loc de numărul real λ vom spune de multe ori scalarul λ. Produsul vectorului $\overrightarrow{a}$ cu numărul λ este un nou vector $\overrightarrow{c}$ notat $\lambda\overrightarrow{a}$, colinear cu $\overrightarrow{a}$, având modulul $|\overrightarrow{c}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$ şi de acelaşi sens cu $\overrightarrow{a}$ dacă $\lambda > 0$ sau de sens contrar dacă $\lambda < 0$.*

Vectorul opus $-\overrightarrow{a}$ se poate considera ca rezultat al înmulţirii vectorului $\overrightarrow{a}$ cu numărul $\lambda = -1$:

$$-\overrightarrow{a} = (-1)\overrightarrow{a}.$$

Din definiţia înmulţirii unui vector cu un număr rezultă că dacă $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$ atunci $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{a}$ sunt colineari. Este evident că şi invers, dacă $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt vectori colineari atunci există un număr λ astfel ca $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$.

Se verifică uşor următoarele proprietăţi de distributivitate:

$$\begin{aligned} \lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) &= \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}, \\ (\lambda + \mu)\overrightarrow{a} &= \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a} \end{aligned}$$

ca şi proprietatea de asociativitate

$$(\lambda\mu)\overrightarrow{a} = \lambda(\mu\overrightarrow{a}).$$

Aceste proprietăţi, împreună cu proprietăţile de la adunare, ne permit să afirmăm că mulţimea vectorilor liberi are o structură de spaţiu vectorial real.

Un vector al cărui modul este egal cu unitatea se numeşte *vector unitar* sau *versor.* Fiind dat un vector nenul $\overrightarrow{a}$, considerăm vectorul colinear cu $\overrightarrow{a}$, de acelaşi sens, dar

de modul egal cu unitatea. Acesta se numeşte *versorul lui* $\overrightarrow{a}$. Dacă îl notăm cu $\overrightarrow{u}$, ţinând cont de definiţia înmulţirii cu scalari, se poate scrie

$$\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\overrightarrow{u},$$

adică orice vector este egal cu produsul dintre modulul său şi versorul său.

1.3 Descompunerea unui vector după o bază

Definiţia 1.3.1 *Fie vectorii* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_k}$. *Orice vector de forma* $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\cdots\lambda_k\overrightarrow{a_k}$ *unde* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ *sunt numere se numeşte combinaţie lineară a vectorilor* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_k}$; *numerele* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ *se numesc coeficienţii combinaţiei lineare. Dacă un vector se poate scrie ca o combinaţie lineară a unor vectori, spunem că el s-a descompus după aceşti vectori.*

Propoziţia 1.3.1 *Dacă* $\overrightarrow{e_1}$ *este un vector nenul, atunci orice vector colinear cu el se descompune după el în mod unic.*

Intr-adevăr, dacă $\overrightarrow{a}$ este colinear cu $\overrightarrow{e_1}$ atunci avem $\overrightarrow{a} = \lambda_1\overrightarrow{e_1}$ unde $\lambda_1 = \pm\frac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{e_1}|}$ unde se ia plus sau minus după cum $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{e_1}$ au sau nu au acelaşi sens. Nu putem avea şi $\overrightarrow{a} = \mu_1\overrightarrow{e_1}$ cu $\mu_1 \neq \lambda_1$ pentru că am avea $(\lambda_1 - \mu_1)\overrightarrow{e_1} = 0$, ceea ce este imposibil.

Propoziţia 1.3.2 *Dacă* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ *sunt doi vectori necolineari, atunci orice vector* $\overrightarrow{a}$ *coplanar cu ei se descompune după aceşti vectori, descompunerea fiind unică.*

Să observăm că vectorii $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ sunt nenuli. Dacă $\overrightarrow{a}$ este colinear cu unul dintre ei, propoziţia este demonstrată. In cazul general, dispunem cei trei vectori în acelaşi punct O. Prin extremitatea A a vectorului $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, ducem dreptele AP, AQ paralele cu $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, P, Q fiind pe suporţii lui $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$. Atunci $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Dar $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ fiind colineari cu $\overrightarrow{e_1}$, respectiv $\overrightarrow{e_2}$, există numerele λ_1, λ_2 ca $\overrightarrow{OP} = \lambda_1\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OQ} = \lambda_2\overrightarrow{e_2}$, adică $\overrightarrow{a} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2}$. Dacă ar mai exista o descompunere $\overrightarrow{a} = \mu_1\overrightarrow{e_1} + \mu_2\overrightarrow{e_2}$ atunci $\mu_1\overrightarrow{e_1} + \mu_2\overrightarrow{e_2} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2}$ sau $(\lambda_1 - \mu_1)\overrightarrow{e_1} = (\mu_2 - \mu_1)\overrightarrow{e_2}$, adică vectorii $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ ar fi colineari dacă $\lambda_1 - \mu_1 \neq 0$, $\lambda_2 - \mu_2 \neq 0$. Rezultă $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2$ adică descompunerea este unică.

In mod analog, se demonstrează propoziţia:

Propoziţia 1.3.3 *Dacă $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ sunt trei vectori necoplanari, atunci orice vector se descompune după aceşti vectori, descompunerea fiind unică.*

Definiţia 1.3.2 *Numim bază în spaţiu un sistem de trei vectori necoplanari luaţi într-o ordine dată $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.*

Potrivit propoziţiei de mai sus, o bază permite ca oricărui vector să-i ataşăm un sistem de trei numere $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, coeficienţii descompunerii vectorului după baza dată. Invers, oricărui sistem ordonat de trei numere $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ având o bază $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, putem să-i punem în corespondenţă vectorul $\overrightarrow{a} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \lambda_3 \overrightarrow{e_3}$.

Definiţia 1.3.3 *Numim bază în plan un sistem de doi vectori necolineari situaţi în acest plan şi luaţi într-o ordine dată $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.*

Ca şi mai sus, oricărui vector din planul bazei i se poate pune în corespondenţă biunivocă o pereche de numere λ_1, λ_2.

Pe o dreaptă orice vector nenul constituie o bază a vectorilor situaţi pe acea dreaptă.

Definiţia 1.3.4 *Dacă $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ este o bază şi $\overrightarrow{a} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \lambda_3 \overrightarrow{e_3}$ atunci numerele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se numesc componentele sau coordonatele vectorului $\overrightarrow{a}$ pe baza dată. Analog pentru o bază în plan.*

Componentele unui vector pe o bază oarecare sunt adimensionale.

Este evident că operaţiile de adunare a vectorilor şi de înmulţire cu un scalar revin la adunarea componentelor respectiv înmulţirea fiecărei componente cu acel scalar.

Definiţia 1.3.5 *Mai mulţi vectori $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_k}$ se numesc linear dependenţi dacă există o combinaţie lineară nulă a acestor vectori cu cel puţin un coeficient nenul, adică există numerele $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ astfel că*

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_k^2 \neq 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k} = 0.$$

In caz contrar vectorii se numesc linear independenţi. Deci vectorii $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_k}$ sunt linear independenţi dacă şi numai dacă din egalitatea $\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k} = 0$ rezultă cu necesitate $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_k = 0$.

Următoarele proprietăţi evidente arată semnificaţia geometrică a acestor noţiuni:

- Doi vectori sunt linear dependenţi dacă şi numai dacă sunt colineari.
- Trei vectori sunt lineari dependenţi dacă şi numai dacă sunt coplanari.
- Orice patru vectori sunt linear dependenţi.

Sunt de asemenea evidente următoarele proprietăţi care ne dau posibilitatea să decidem asupra linear dependenţei sau linear independenţei a doi sau trei vectori:

- Doi vectori sunt lineari dependenţi (deci colineari) dacă şi numai dacă componentele lor, într-o bază dată, sunt proporţionale.
- Trei vectori sunt linear dependenţi (deci coplanari) dacă şi numai dacă determinantul componentelor lor, într-o bază dată, este nul.

1.4 Produsul scalar a doi vectori

Definiţia 1.4.1 *Unghiul* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ *dintre doi vectori nenuli* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *este unghiul convex format de cei doi vectori dispuşi în acelaşi punct.*

Uneori se va considera unghiul orientat, adică se va preciza de la care vector şi în ce sens se măsoară acest unghi. Dacă nu se fac aceste precizări, atunci se consideră unghiul mai mic decât π. Dacă cel puţin unul din cei doi vectori este nul unghiul dintre ei este nedeterminat.

Doi vectori se numesc ortogonali (perpendiculari) dacă unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{2}$.

Definiţia 1.4.2 *Produsul scalar a doi vectori* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *este un număr, notat* $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$*, egal cu produsul dintre modulele vectorilor şi cosinusul unghiului dintre ei*

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}).$$

Produsul scalar intervine în geometrie în probleme legate de distanţe şi unghiuri, adică în probleme metrice. Dimensiunea fizică a produsului scalar a doi vectori este L^2.

Următoarele proprietăţi ale produsului scalar rezultă chiar din definiţie:

- Produsul scalar este comutativ.
- Produsul scalar al unui vector cu el însuşi este egal cu pătratul modulului acelui vector $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$. In loc de $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a}$ se scrie $\overrightarrow{a}^2$.
- Produsul scalar a doi vectori este nul atunci şi numai atunci când cei doi vectori sunt perpendiculari sau cel puţin unul dintre ei este nul.

Vom demonstra acum propoziţia:

Propoziţia 1.4.1 *Dacă vectorii bazei $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ sunt ortogonali doi câte doi, atunci componentele oricărui vector $\overrightarrow{a} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2} + \lambda_3\overrightarrow{e_3}$ sunt date de relaţiile*

$$\lambda_1 = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{e_1}}{|\overrightarrow{e_1}|^2}, \lambda_2 = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{e_2}}{|\overrightarrow{e_2}|^2}, \lambda_1 = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{e_2}}{|\overrightarrow{e_2}|^2}.$$

In adevăr, avem $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$, fiecare termen fiind colinear respectiv cu $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ şi $\lambda_1 = \pm\frac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{e_1}|}$ unde se alege semnul plus sau minus după cum $\overrightarrow{a_1}$ şi $\overrightarrow{e_1}$ au sau nu au acelaşi sens. Dar $\pm|\overrightarrow{a_1}| = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi_1$ unde φ_1 este unghiul dintre $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{e_1}$; deci

$$\lambda_1 = \frac{|\overrightarrow{a}|\cos\varphi_1}{|\overrightarrow{e_1}|} = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{e_1}}{|\overrightarrow{e_1}|^2}.$$

Rezultă acum următoarea propoziţie:

Propoziţia 1.4.2 *Oricare ar fi vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ şi numerele λ, μ reale au loc egalităţile*

$$\begin{aligned}(\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b})\overrightarrow{c} &= \lambda\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} + \mu\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c},\\ (\lambda\overrightarrow{a})\overrightarrow{c} &= \lambda\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c},\\ (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} &= \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}.\end{aligned}$$

Ultimele două egalităţi sunt cazuri particulare ale primei egalităţi. Vom observa că egalităţile de mai sus exprimă faptul că un factor scalar iese în faţa produsului scalar şi produsul scalar este distributiv faţă de suma vectorilor.

Dacă $\overrightarrow{c} = 0$, egalităţile sunt evidente. Dacă $\overrightarrow{c} \neq 0$ alegem pe $\overrightarrow{c}$ ca prim vector al bazei, completând baza cu doi vectori ortogonali cu el şi între ei. Atunci $\frac{(\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|^2}$ este prima componentă a vectorului $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$ în această bază; la fel $\frac{\lambda\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|^2}, \frac{\mu\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|^2}$ sunt

componentele prime ale lui $\lambda\overrightarrow{a}$ respectiv $\mu\overrightarrow{b}$. Dar cum componenta combinaţiei lineare este combinaţia componentelor, egalitatea este demonstrată.

Observaţie. Dacă $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ sunt doi vectori şi φ este unghiul dintre ei, atunci $|\overrightarrow{b}|\cos\varphi$ este mărimea proiecţiei lui $\overrightarrow{b}$ pe $\overrightarrow{a}$ şi deci produsul scalar al celor doi vectori este egal cu produsul dintre mărimea primului şi mărimea proiecţiei celuilalt pe el. Proprietăţile de mai sus rezultă imediat şi din această interpretare.

Propoziţia de mai sus îndreptăţeşte introducerea următoarei

Definiţia 1.4.3 *O bază se numeşte ortonormată dacă vectorii săi sunt ortogonali doi câte doi şi sunt versori (vectori unitari).*

O bază ortonormată $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ este caracterizată de relaţiile

$$\overrightarrow{e_1}^2 = \overrightarrow{e_2}^2 = \overrightarrow{e_3}^2 = 1, \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1} = 0$$

sau pe scurt

$$\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker definit prin relaţiile

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & dac\breve{a} \quad i = j \\ 0 & dac\breve{a} \quad i \neq j \end{cases}.$$

Dacă baza $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ este ortonormată, atunci componentele oricărui vector $\overrightarrow{a}$ pe această bază $\overrightarrow{a} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2} + \lambda_3\overrightarrow{e_3}$ sunt date de relaţiile

$$\lambda_1 = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{e_1}, \lambda_2 = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{e_2}, \lambda_3 = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{e_3}$$

sau

$$\lambda_1 = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi_1, \lambda_2 = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi_2, \lambda_3 = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi_3$$

unde $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sunt unghiurile formate de $\overrightarrow{a}$ cu vectorii bazei.

Considerând că mărimea unui versor este adimensională, componentele unui vector pe o bază ortonormată au dimensiunea L, deci se exprimă în unităţi de lungime.

In cazul în care vectorul $\overrightarrow{a}$ este un versor ($|\overrightarrow{a}| = 1$), componentele sale pe o bază ortonormată sunt

$$\lambda_1 = \cos\varphi_1, \lambda_2 = \cos\varphi_2, \lambda_3 = \cos\varphi_3.$$

Din acest motiv componentele versorului unei direcţii se numesc *cosinuşi directori* ai direcţiei respective, în timp ce componentele oricărui vector al unei direcţii se numesc *parametri directori* ai direcţiei respective.

Intr-o bază ortonormată produsul scalar capătă o expresie simplă în funcţie de componentele lor:

Propoziţia 1.4.3 *Fie baza ortonormată* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *şi vectorii*

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{b} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + \beta_3 \overrightarrow{e_3}.$$

Produsul lor scalar este dat de formula

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Prin urmare, într-o bază ortonormată, produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor componentelor.

Demonstraţia este imediată.

Din propoziţia de mai sus rezultă că într-o bază ortonormată avem formule simple pentru calculul lungimii unui vector şi al unghiului dintre doi vectori

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{a}| &= \sqrt{\overrightarrow{a}^2} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \\ \cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) &= \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)}}. \end{aligned}$$

1.5 Orientarea unei baze, produse exterioare

Pe o dreaptă orice vector nenul constituie o bază. Dacă $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1'}$ sunt doi asemenea vectori colineari nenuli ei pot să fie sau de acelaşi sens sau de sens contrar. Spunem că ei determină baze cu aceeaşi orientare sau cu orientări diferite.

Definiţia 1.5.1 *Baza de pe o dreaptă* $\overrightarrow{e_1}$ *este orientată la dreaptă dacă atunci când privim dreapta în faţa noastră,* $\overrightarrow{e_1}$ *este dirijat spre dreapta noastră. In caz contrar, baza este orientată la stânga.*

Definiţia 1.5.2 *Baza* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ *din plan este orientată la dreapta dacă un observator care priveşte în sensul lui* $\overrightarrow{e_2}$ *îl vede pe* $\overrightarrow{e_1}$ *în dreapta sa; în caz contrar baza este orientată la stânga.*

O definiţie echivalentă este

Definiţia 1.5.3 *O bază este orientată la dreapta dacă primul vector al bazei poate fi suprapus peste al doilea printr-o rotaţie de unghi mai mic ca $\frac{\pi}{2}$ în sens direct trigonometric (invers sensului acelor de ceas).*

Cel mai adesea este folosită o bază ortonormată orientată la dreaptă ai cărei versori se notează $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$. Dacă

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1 \overrightarrow{i} + \alpha_2 \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{b} = \beta_1 \overrightarrow{i} + \beta_2 \overrightarrow{j}$$

sunt doi vectori din plan, baza $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ este orientată la dreapta dacă şi numai dacă într-o bază ortonormată orientată la dreapta în care primul vector este versorul lui $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ are după al doilea vector al bazei o componentă pozitivă. Scriind $\overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b'}$, $\overrightarrow{b'}$ este componenta perpendiculară pe $\overrightarrow{a}$ a lui $\overrightarrow{b}$ dacă $(\overrightarrow{b} - \lambda \overrightarrow{a})\overrightarrow{a} = 0$, de unde

$$\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{b} - \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{\overrightarrow{a}^2}\overrightarrow{a}.$$

Putem găsi pătratul mărimii lui $\overrightarrow{b'}$

$$\overrightarrow{b'}^2 = \frac{\overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2 - (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2}{\overrightarrow{a}^2}.$$

Pătratul ariei paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ este $\overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2 - (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2$.

Definiţia 1.5.4 *Dacă $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ sunt doi vectori, se numeşte determinantul Gram al lor numărul*

$$G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}^2 & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}^2 \end{vmatrix}.$$

In funcţie de coordonate putem scrie

$$G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2.$$

Dacă $\overrightarrow{b} = \beta_1' \overrightarrow{e_1'} + \beta_2' \overrightarrow{e_2'}$ este expresia lui $\overrightarrow{b}$ în baza ortonormată orientată la dreapta în care primul vector este versorul lui $\overrightarrow{a}$, vom avea

$$G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} |\overrightarrow{a}| & 0 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{vmatrix}^2 = (|\overrightarrow{a}|\beta_2')^2$$

şi deci baza $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ este orientată la dreapta dacă şi numai dacă determinanul $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$ este pozitiv. Mai mult, putem spune că acest determinant reprezintă *aria orientată*, cu semn, a paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$. Mai precis, dacă paralelogramul se parcurge în ordinea $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, -\overrightarrow{a}, -\overrightarrow{b}$, un vector considerat dispus în extremitatea celui din faţa sa, în sens direct trigonometric, aria sa orientată este pozitivă; în caz contrar aria sa orientată este negativă. $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$ reprezintă aria orientată a triunghiului obţinut prin parcurgerea în ordinea $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, -(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$.

Definiţia 1.5.5 *Dacă $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ este o bază orientată la dreapta într-un plan şi $\overrightarrow{a} = \alpha_1 \overrightarrow{i} + \alpha_2 \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \beta_1 \overrightarrow{i} + \beta_2 \overrightarrow{j}$ sunt doi vectori în acest plan, se numeşte produs exterior al acestor vectori în această ordine numărul*

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Dimensiunea fizică a produsului exterior a doi vectori din plan este L^2, adică se exprimă în unităţi de lungime la pătrat.

Definiţia 1.5.6 *Se numeşte unghi orientat dintre vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ (măsurat de la $\overrightarrow{a}$ la $\overrightarrow{b}$) într-o bază ortonormată dreaptă dată $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ numărul $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ determinat abstracţie făcând de multipli de 2π de relaţiile*

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}, \sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}.$$

Notăm că

$$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b})^2 = G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}).$$

Vom observa că produsul exterior a doi vectori are proprietăţile:

- $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$ este anticomutativ;
- $(\lambda \overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ un factor iese în faţă;
- $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a_2} \wedge \overrightarrow{b}$ este distributiv faţă de adunare.
- $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = 0$ dacă şi numai dacă vectorii sunt linear dependenţi (colineari).

Definiţia 1.5.7 *O bază în spaţiu* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *este orientată la dreapta dacă un observator aşezat în sensul lui* $\overrightarrow{e_3}$ *privind în sensul lui* $\overrightarrow{e_2}$ *îl are pe* $\overrightarrow{e_1}$ *în dreapta sa. In caz contrar, baza este orientată la stânga.*

Există şi alte definiţii. După definiţia numită *regula burghiului drept*,

Definiţia 1.5.8 *O bază* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *este orientată la dreapta, atunci când pentru a înainta în aceeaşi parte cu sensul lui* $\overrightarrow{e_3}$*, burghiul drept trebuie rotit astfel încât vectorul* $\overrightarrow{e_1}$ *să se suprapună peste* $\overrightarrow{e_2}$ *prin cea mai mică rotaţie. In caz contrar baza este orientată la stânga.*

După definiţia numită *regula mâinii drepte,*

Definiţia 1.5.9 *O bază* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ *este orientată la dreapta dacă cei trei vectori dispuşi în acelaşi punct sunt situaţi la fel ca degetele mare, arătător şi mijlociu de la mâna dreaptă. Dacă sunt situaţi ca degetele de la mâna stângă, baza este orientată la stânga.*

Cel mai adesea este folosită o bază ortonormată orientată la dreapta. In acest caz vectorii bazei se notează cu $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$. Sistemul cartezian a cărui bază este ortonormată şi orientată la dreapta se numeşte *sistem rectangular drept.*

Fie acum $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ o bază ortonormată orientată la dreapta şi vectorii

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= \alpha_1 \overrightarrow{i} + \alpha_2 \overrightarrow{j} + \alpha_3 \overrightarrow{k},\\ \overrightarrow{b} &= \beta_1 \overrightarrow{i} + \beta_2 \overrightarrow{j} + \beta_3 \overrightarrow{k},\\ \overrightarrow{c} &= \gamma_1 \overrightarrow{i} + \gamma_2 \overrightarrow{j} + \gamma_3 \overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

Pentru a vedea cum este orientată baza $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ găsim vectorul $\overrightarrow{d} = \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}$ din planul vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ astfel încât vectorul $\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$ să fie perpendicular pe planul vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$. Vectorul $\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$ este înălţimea paralelipipedului construit pe cei trei vectori. Vom avea

$$\begin{aligned}\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} &= \lambda \overrightarrow{a}^2 + \mu \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b},\\ \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} &= \lambda \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}^2\end{aligned}$$

şi deci

$$\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d} = \frac{1}{G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}\left(G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} - \begin{vmatrix} \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}^2 \end{vmatrix}\overrightarrow{a} - \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}^2 & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} \end{vmatrix}\overrightarrow{b}\right)$$

sau

$$\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d} = \frac{1}{G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})} \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}^2 & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}^2 & \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c} \end{vmatrix}$$

unde în dreapta este un determinant formal care se dezvoltă după ultima coloană. Rezultă

$$(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d})\overrightarrow{c} = \frac{G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}{G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}$$

unde

$$G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}^2 & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}^2 & \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}^2 \end{vmatrix}$$

este determinantul Gram al celor trei vectori. Rezultă

$$(\overrightarrow{d} - \overrightarrow{c})^2 = \frac{G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}{G(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}$$

şi deci pătratul volumului paralelipipedului este egal cu determinantul Gram al celor trei vectori. Ţinând cont de expresiile produselor scalare rezultă că determinantul Gram al celor trei vectori este egal cu pătratul determinantului

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Acest determinant este pozitiv dacă cei trei vectori formează o bază orientată la dreapta şi este negativ în caz contrar. Putem spune că acest determinant reprezintă volumul orientat al paralelipipedului construit pe cei trei vectori.

Definiţia 1.5.10 *Dacă $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ este o bază ortonormată orientată la dreapta şi*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= \alpha_1 \overrightarrow{i} + \alpha_2 \overrightarrow{j} + \alpha_3 \overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{b} &= \beta_1 \overrightarrow{i} + \beta_2 \overrightarrow{j} + \beta_3 \overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{c} &= \gamma_1 \overrightarrow{i} + \gamma_2 \overrightarrow{j} + \gamma_3 \overrightarrow{k}. \end{aligned}$$

sunt trei vectori, se numeşte produs exterior al celor trei vectori în această ordine numărul

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Dimensiunea fizică a produsului exterior a trei vectori este L^3, adică se exprimă în unităţi de lungime la cub.

Produsul exterior a trei vectori este linear în fiecare factor al său şi este antisimetric, adică nu se schimbă dacă asupra factorilor se efectuează o permutare circulară, dar îşi schimbă semnul dacă se schimbă ordinea a doi factori

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} &= \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \\ &= -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{b} = - - \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}. \end{aligned}$$

Produsul exterior a trei vectori este nul dacă şi numai dacă vectorii sunt linear dependenţi (coplanari).

Din proprietăţile determinanţilor şi ale produselor scalare rezultă că are loc relaţia

$$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})(\overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{e} \wedge \overrightarrow{f}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{d} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{e} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{f} \\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{d} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{e} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{f} \\ \overrightarrow{c}\overrightarrow{d} & \overrightarrow{c}\overrightarrow{e} & \overrightarrow{c}\overrightarrow{f} \end{vmatrix}.$$

1.6 Vectori de poziţie, sistem de coordonate

Fie O un punct în spaţiu (plan). Am văzut că fiind dat un vector $\overrightarrow{a}$, există un punct unic A astfel încât $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$. Se spune că vectorul $\overrightarrow{a}$ a fost construit sau dispus în punctul O. Invers, dacă O este fixat, oricare ar fi punctul A obţinem un vector $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$. Cu alte cuvinte, alegându-se un punct O pe care îl numim *origine a spaţiului* (planului) se poate stabili o corespondenţă biunivocă între mulţimea punctelor din spaţiu (plan) şi mulţimea vectorilor din spaţiu (plan). Vectorul ataşat în acest fel unui punct se numeşte *vectorul de poziţie* al acestui punct în raport cu originea aleasă. Vectorul de poziţie al punctului A va fi notat $\overrightarrow{r_A}$, în timp ce vectorul de poziţie al unui punct curent M va fi notat $\overrightarrow{r}$ (fără indicele punctului).

Fie A, B două puncte ai căror vectori de poziţie în raport cu o origine O sunt $\overrightarrow{r_A}$ respectiv $\overrightarrow{r_B}$. Din regula triunghiului avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},\\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}\end{aligned}$$

adică vectorul determinat de două puncte este egal cu diferenţa între vectorul de poziţie al extremităţii şi vectorul de poziţie al originii vectorului.

In geometrie, o noţiune importantă este noţiunea de *raport în care un punct împarte un segment dat*. Se spune că punctul M împarte segmentul AB în raportul λ dacă are loc relaţia $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$. Când capetele segmentului AB au vectorii de poziţie $\overrightarrow{r_A}, \overrightarrow{r_B}$, iar M are vectorul de poziţie $\overrightarrow{r_M}$, înlocuind în relaţia de definiţie rezultă

$$\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_A} = \lambda(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A})$$

de unde avem vectorul de poziţie al lui M

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \lambda\overrightarrow{r_B}}{1+\lambda}.$$

In particular, dacă M este mijlocul segmentului AB $(\lambda = 1)$ avem

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}}{2}.$$

Definiţia 1.6.1 *Se numeşte sistem cartezian de coordonate sau reper cartezian în spaţiu ansamblul* $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ *alcătuit dintr-un punct* O *şi o bază* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. *Punctul* O *se numeşte originea sistemului de coordonate; dreptele care trec prin originea sistemului şi sunt paralele cu vectorii bazei se numesc axe de coordonate - axa absciselor, axa ordonatelor şi axa cotelor; planele determinate de axele de coordonate se numesc plane de coordonate.*

Vectorul de poziţie al unui punct în raport cu originea sistemului se numeşte vectorul de poziţie al punctului în acest sistem. Componentele vectorului de poziţie al punctului M pe baza sistemului de coordonate

$$\overrightarrow{r_M} = x_M\overrightarrow{e_1} + y_M\overrightarrow{e_2} + z_M\overrightarrow{e_3}$$

se numesc *coordonatele punctului* M - abscisa, ordonata, cota - în raport cu sistemul de coordonate dat. In acest mod se stabileşte o corespondenţă biunivocă între mulţimea

punctelor M din spaţiu şi mulţimea tripletelor de numere reale x_M, y_M, z_M. Această corespondenţă se marchează scriind $M(x_M, y_M, z_M)$. Coordonatele unui punct curent vor fi notate fără indice. Un sistem cartezian de coordonate va fi notat $Oxyz$, marcând axele lui Ox, Oy, Oz.

In mod analog se definesc sistemul cartezian de coordonate şi coordonatele unui punct în plan.

Dacă punctele $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$ determină vectorul $\overrightarrow{AB}$, din relaţia $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$ obţinem

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{e_1} + (y_B - y_A)\overrightarrow{e_2} + (z_B - z_A)\overrightarrow{e_3},$$

deci componentele unui vector în raport cu baza unui sistem cartezian de coordonate sunt egale cu diferenţele dintre coordonatele extremităţii şi coordonatele originii vectorului.

In mod analog coordonatele punctului M care împarte segmentul AB în raportul λ sunt

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

1.7 Schimbarea sistemelor de coordonate

1.7.1 Translaţia sistemului de coordonate

Considerăm sistemul cartezian de coordonate $\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ cu originea O şi baza $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Sistemul cartezian $\{O', \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ cu originea O' şi aceeaşi bază se obţine din primul sistem prin translaţia sa în noua origine. Un punct oarecare M are în sistemul iniţial coordonatele (x, y, z), iar în al doilea sistem coordonatele (x', y', z'). Aceasta înseamnă că vectorii de poziţie ai punctului M în raport cu originile O respectiv O' sunt

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3}, \quad \overrightarrow{O'M} = x'\,\overrightarrow{e_1} + y'\,\overrightarrow{e_2} + z'\,\overrightarrow{e_3}.$$

Fie (x_0, y_0, z_0) coordonatele originii O' a noului sistem de coordonate în raport cu vechiul sistem de coordonate; avem deci

$$\overrightarrow{OO'} = x_0\,\overrightarrow{e_1} + y_0\,\overrightarrow{e_2} + z_0\,\overrightarrow{e_3}.$$

Cum are loc relaţia

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

sau

$$x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3} = x_0\,\overrightarrow{e_1} + y_0\,\overrightarrow{e_2} + z_0\,\overrightarrow{e_3} + x'\,\overrightarrow{e_1} + y'\,\overrightarrow{e_2} + z'\,\overrightarrow{e_3}$$

din egalarea componentelor rezultă relaţia între vechile coordonate şi noile coordonate

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y', \\ z = z_0 + z'. \end{cases}$$

Introducând coloanele coordonatelor

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

avem scrierea matriceală

$$X = X_0 + X'.$$

In cazul plan avem relaţii analoage. Vom reţine că aceste relaţii sunt de gradul întâi în raport cu coordonatele. Deci o ecuaţie de un anumit grad în x, y, z se va transforma tot într-o relaţie de acelaşi grad în x', y', z'.

1.7.2 Schimbarea bazei sistemului de coordonate

Să trecem acum de la sistemul cartezian $\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ cu originea O şi baza $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ la sistemul $\{O, \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\}$ cu aceeaşi origine dar cu baza $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$. Vectorii noi baze se vor exprima în funcţie de vectorii vechii baze prin relaţiile

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = \sigma_{11}\,\overrightarrow{e_1} + \sigma_{21}\,\overrightarrow{e_2} + \sigma_{31}\,\overrightarrow{e_3}, \\ \overrightarrow{e_2'} = \sigma_{12}\,\overrightarrow{e_1} + \sigma_{22}\,\overrightarrow{e_2} + \sigma_{32}\,\overrightarrow{e_3}, \\ \overrightarrow{e_3'} = \sigma_{13}\,\overrightarrow{e_1} + \sigma_{23}\,\overrightarrow{e_2} + \sigma_{33}\,\overrightarrow{e_3}. \end{cases}$$

Dacă introducem matricele linie de vectori ai vechii şi noii baze şi considerăm înmulţirea formală, putem scrie relaţiile de sus sub forma

$$\left(\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\right) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} . = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})\, S$$

Matricea S se numeşte *matricea de trecere* de la baza veche la baza nouă; ea are pe prima coloană componentele pe vechea bază ale lui $\overrightarrow{e'_1}$, pe a doua coloană componentele lui $\overrightarrow{e'_2}$ şi pe a treia coloană componentele lui $\overrightarrow{e'_3}$. $\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}$ alcătuind o bază, matricea S este inversabilă; fie

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

inversa lui S. Vom avea

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = \left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right) T,$$

adică, matricea T este matricea de trecere de la baza nouă la baza veche.

Fie (x, y, z), (x', y', z') coordonatele unui punct curent M în sistemul vechi şi în sistemul nou, adică avem relaţiile

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})\, X$$

$$\overrightarrow{OM} = x'\overrightarrow{e'_1} + y'\overrightarrow{e'_2} + z'\overrightarrow{e'_3} = \left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right) X'.$$

Ţinând cont de relaţia dintre baze avem

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})\, X = \left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right) X' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})\, SX'$$

de unde deducem vechile coordonate în funcţie de noile coordonate

$$X = SX'.$$

Invers vom avea noile coordonate în funcţie de vechile coordonate

$$X' = TX.$$

Vom observa că în timp ce în trecerea de la vechea bază la noua bază participă matricea S, în trecerea de la vechile coordonate la noile coordonate participă matricea inversă T şi invers. Se zice că la schimbarea bazelor coordonatele se schimbă contravariant.

Şi acum relaţiile între coordonatele vechi şi noi sunt de gradul întâi şi deci gradul unei ecuaţii nu se schimbă.

Faptul că o bază $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ este ortonormată se poate exprima matriceal prin relaţia

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})^t (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix} (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

unde produsele se consideră produse scalare. Dacă S este matricea de trecere de la baza ortonormată $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la baza ortonormată $\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right)$ vom avea

$$\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right)^t \left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right) = S^t (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})^t (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) S = S^t S = I,$$

adică matricea de trecere este ortogonală: transpusa sa este şi inversa sa. Se dovedeşte încă odată avantajul bazelor ortonormate.

In plan vom avea relaţii analoage. Dacă se trece de la baza ortonormată orientată la dreapta $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la baza ortonormată orientată tot la dreapta $\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}\right)$, versorii noii baze se obţin din vectorii vechii baze printr-o rotaţie de unghi θ şi deci matricea de trecere va fi matricea ortogonală

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dacă trecem de la sistemul de coordonate $\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ la sistemul de coordonate $\{O', \overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\}$ unde O' are în vechiul sistem coloana coordonatelor $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ şi se trece de la baza veche la baza nouă cu matricea de trecere S

$$(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})S$$

legătura între coloana coordonatelor curente vechi X şi coloana coordonatelor curente noi X' este

$$\begin{aligned} X &= X_0 + SX', \\ X' &= T(X - X_0) \end{aligned}$$

adică tot relaţii de gradul întâi în coordonate.

1.8 Mărimi vectoriale

Pentru a ne reprezenta lumea exterioară construim anumite cadre punând ordine în percepţiile şi senzaţiile noastre. Un prim asemenea cadru este acela de spaţiu. Deşi suntem în continuă schimbare, există o schimbare minimă care ne face sa spunem că suntem imobili. Când un asemenea minim nu este atins spunem că avem o schimbare de atitudine sau de poziţie. Când după o serie de schimbări de atitudine sau de poziţie totul se petrece ca şi când am fi rămas imobili spunem că am revenit în acelaşi loc. Consensul tuturor oamenilor asupra identificării locurilor conferă caracter absolut acestei noţiuni, care altfel nu avea sens decât pentru noi. Mulţimea tuturor locurilor constituie spaţiul fizic. Experienţa ne arată că pentru a repera un loc în spaţiu fizic sunt necesare şi suficiente trei indicaţii. Să ne gândim cum indicăm locul unui cuib într-un pom. De asemenea experienţa ne arată că pentru două locuri pe care le considerăm imobile există un invariant pe care îl numim distanţa între cele două locuri. Aceste considerente ne conduc să adoptăm în primă aproximaţie ca model matematic al spaţiului fizic spaţiul geometriei elementare, locurile spaţiului fizic fiind punctele spaţiului geometriei, distanţa dintre locuri fiind distanţa dintre puncte.

Un alt cadru este legat de conştiinţa succesiunii senzaţiilor noastre de foame, sete,etc. Prin intercalarea evenimentelor lumii reale pe această scară individuală ajungem la ceea ce numim timp fizic individual. Prin sincronizarea timpilor fizici individuali prin transmitere de semnale ajungem la noţiunea de timp fizic universal. Admiţând că sincronizarea se face prin transmitere de semnale instantanee, timpul universal capăta caracter absolut. Odată aleasă o unitate de timp modelul matematic al timpului este mulţimea numerelor reale. Dimensiunea fizică a timpului se notează cu T.

Un punct M este în mişcare în raport cu un sistem de coordonate $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ atunci când vectorul său de poziţie $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$ este funcţie de timp $\overrightarrow{r}(t)$. Mărimea

$$\frac{\overrightarrow{r}(t_2) - \overrightarrow{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1}(\overrightarrow{r}(t_2) - \overrightarrow{r}(t_1))$$

obţinută prin înmulţirea vectorului $\overrightarrow{r}(t_2) - \overrightarrow{r}(t_1)$ cu numărul $\frac{1}{t_2 - t_1}$ reprezintă viteza medie a punctului M în intevalul de timp $[t_1, t_2]$. Dimensiunea fizică a acestei mărimi este LT^{-1} şi deci nu este un vector în sensul în care am definit pînă acum vectorii. Spunem că ea este o mărime vectorială pe care o numim viteza medie. Ea poate fi reprezentată

prin vectorul care numeric are aceeaşi mărime cu ea sau la o anumită scară şi aceeaşi direcţie şi sens.Dacă există limita acestei mărimi când $t_2 \to t_1$această limită este tot o mărime vectorială numită viteza la momentul t_1. In diferite domenii ale fizicii se întroduc alte mărimi vectoriale: viteze, impulsuri, acceleraţii, forţe, etc. Ele se caracterizează pe lângă mărimea propriu zisă şi prin direcţie şi sens. Printr-un abuz de limbaj de multe ori pentru asemenea mărimi se foloseşte tot denumirea de vectori. Mărimile fizice care sunt caracterizate numai de un număr urmat de unitatea de măsură se numesc scalari. Prin înmulţirea unei mărimi vectoriale cu un scalar se obţine o altă mărime vectorială. De exemplu, prin înmulţirea unei viteze cu o masă se obţine o altă mărime vectorială numită impuls cu dimensiunea fizică MLT^{-1}, prin înmulţirea unei acceleraţii cu o masă se obţine o mărime vectorială numită forţă cu dimensiunea fizică MLT^{-2}.

Produsul scalar a două mărimi vectoriale este produsul scalar al vectorilor care îi reprezintă. Dacă D_1, D_2 sunt dimensiunile fizice ale celor două mărimi vectoriale, produsul lor scalar este un scalar cu dimensiunea fizică $D_1 D_2$. Ca exemplu, produsul scalar al unei forţe cu un vector este un scalar numit lucru mecanic cu dimensiunea fizică ML^2T^{-2}.

La fel se defineşte produsul exterior (numit cum vom vedea şi produs mixt) a trei mărimi vectoriale.

1.9 Produsul vectorial a doi vectori

Definiţia 1.9.1 *Dacă $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ este o bază ortonormată orientată la dreapta şi*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= \alpha_1 \overrightarrow{i} + \alpha_2 \overrightarrow{j} + \alpha_3 \overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{b} &= \beta_1 \overrightarrow{i} + \beta_2 \overrightarrow{j} + \beta_3 \overrightarrow{k}, \end{aligned}$$

sunt doi vectori, se numeşte produs vectorial al lor mărimea vectorială notată $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ cu proprietatea că oricare ar fi vectorul $\overrightarrow{c}$ are loc relaţia

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}.$$

Din definiţia produsului exterior, cum $\overrightarrow{c}$ este arbitrar, rezultă că produsul vectorial

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ este

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Datorită relaţiei de mai sus, produsul exterior a trei vectori se numeşte şi *produs mixt al celor trei vectori*. De obicei, aceasta este denumirea sub care este folosit în disciplinele tehnice. Dimensiunea fizică a produsului vectorial este L^2.

Putem vorbi de produsul vectorial a două mărimi vectoriale ca fiind egal cu produsul vectorial al vectorilor care îi reprezintă. In acest caz dimensiunea fizică este egală cu cu produsul celor două dimensiuni fizice. De exemplu, produsul vectorial $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{F}$ între vectorul $\overrightarrow{OP}$ şi o forţă $\overrightarrow{F}$ aplicată în punctul P este o mărime vectorială numită momentul forţei în raport cu punctul O cu dimensiunea fizică ML^2T^{-2}.

Produsul vectorial este linear în fiecare factor şi este antisimetric, adică $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$. Produsul vectorial $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ este ortogonal pe fiecare factor al său pentru că

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a} = 0$$

şi

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{b} = 0.$$

Dacă pe lângă vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ considerăm alţi trei vectori necoplanari $\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}$ putem scrie

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d})(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{e}) = (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \wedge (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}))(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{e}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{d} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{e} \\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{d} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{e} \\ (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d})\overrightarrow{c} = 0 & (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d})\overrightarrow{d} = 0 & (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d})\overrightarrow{e} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{d} \end{vmatrix} (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{e}).$$

Rezultă că are loc relaţia

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{d} \end{vmatrix}.$$

In particular are loc relaţia

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2=\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{b}\end{vmatrix}=G(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\sin^2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}).$$

De asemenea putem scrie

$$\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\wedge(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2$$

Putem enunţa

Propoziţia 1.9.1 *Produsul vectorial a doi vectori* $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ *este o mărime vectorială cu proprietăţile:*

a) dacă $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ nu sunt colineari atunci

- $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ este perpendicular pe ambii factori;
- mărimea lui $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ este egală numeric cu aria paralelogramului construit pe cei doi factori;
- sensul lui $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ este astfel încât tripletul $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ este orientat la dreapta;

b) dacă $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ sunt colineari atunci $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=0$.

Scriind relaţia

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{d})=\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{d}\\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{d}\end{vmatrix}.$$

sub forma

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\wedge\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{d}=[(\overrightarrow{a}\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{b}\overrightarrow{c})\overrightarrow{a}]\overrightarrow{d}$$

sau

$$[(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}]\overrightarrow{d}=[(\overrightarrow{a}\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{b}\overrightarrow{c})\overrightarrow{a}]\overrightarrow{d}$$

rezultă

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}=(\overrightarrow{a}\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{b}\overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$$

sau

$$\overrightarrow{c}\times(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=-(\overrightarrow{a}\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}+(\overrightarrow{b}\overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$$

Expresiile din stânga se numesc *duble produse vectoriale.* Dublul produs vectorial este o combinaţie lineară a vectorilor dintre paranteze, coeficienţii fiind produse scalare ale vectorului din afara parantezelor cu cei dintre paranteze şi anume produsul scalar al factorilor nealăturaţi intră cu semnul plus, iar cel al factorilor alăturaţi cu semnul minus.

Din expresia dublului produs vectorial rezultă că produsul vectorial nu este asociativ.

Ca aplicaţie foarte importantă, să considerăm un versor $\overrightarrow{u}$ şi un vector oarecare $\overrightarrow{x}$. Putem scrie

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x}) \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{x})\overrightarrow{u}$$

de unde

$$\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{x})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x}) \times \overrightarrow{u},$$

adică obţinem descompunerea vectorului $\overrightarrow{x}$ într-o componentă în direcţia lui $\overrightarrow{u}$ şi o componentă perpendiculară pe $\overrightarrow{u}$. Mai observăm că tripletul

$$\overrightarrow{u}, (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x}) \times \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x}$$

este format din vectori ortogonali doi câte doi şi orientat drept. In plus, ultimii doi au aceiaşi mărime.

Dacă vectorul $\overrightarrow{x}$ se roteşte cu unghiul φ în jurul axei de versor $\overrightarrow{u}$, componenta lui $\overrightarrow{x}$ după $\overrightarrow{u}$ rămâne constantă în timp ce componenta perpendiculară pe $\overrightarrow{u}$ se roteşte cu unghiul φ în planul vectorilor $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x}) \times \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x}$ devenind

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x}) \times \overrightarrow{u} \cos\varphi + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x} \sin\varphi.$$

Deci rotitul lui $\overrightarrow{x}$ în jurul lui $\overrightarrow{u}$ cu unghiul φ este

$$R(\overrightarrow{u}, \varphi; \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{x})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x}) \times \overrightarrow{u} \cos\varphi + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x} \sin\varphi$$

sau

$$R(\overrightarrow{u}, \varphi; \overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + (1 - \cos\varphi)\,(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{x})\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x} \sin\varphi.$$

Prin calcul direct se deduce că rotitul lui $R(\overrightarrow{u}, \varphi; \overrightarrow{x})$ în jurul aceleiaşi axei de versor $\overrightarrow{u}$ cu unghiul ψ este totuna cu $R(\overrightarrow{u}, \varphi + \psi; \overrightarrow{x})$, rotitul lui $\overrightarrow{x}$ în jurul axei de versor $\overrightarrow{u}$ cu unghiul $\varphi + \psi$. In schimb, rotirea în jurul a diferite drepte nu este comutativă sau asociativă.

Dacă un rigid se roteşte în jurul unei axe de versor $\overrightarrow{u}$ şi $\varphi(t)$ este unghiul cu care s-a rotit rigidul la momentul t, un punct M care la momentul 0 avea în raport cu o origină O de pe axă vectorul de poziţie $\overrightarrow{r}(0)$ va avea la momentul t vectorul de poziţie

$$\overrightarrow{r}(t)=\overrightarrow{r}(0)+(1-\cos\varphi(t))\,(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{r}(0))\,\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{r}(0)\sin\varphi(t).$$

Rezultă că viteza punctului M la momentul t este

$$\overrightarrow{v}(t)=\overset{\bullet}{\overrightarrow{r}}(t)=[\sin\varphi(t)(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{r}(0))\,\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{r}(0)\cos\varphi(t)]\,\overset{\bullet}{\varphi}(t)$$

sau

$$\overrightarrow{v}(t)=\overset{\bullet}{\varphi}(t)\,\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{r}(t)=\overrightarrow{\omega}(t)\times\overrightarrow{r}(t).$$

Vectorul $\overrightarrow{\omega}(t)=\overset{\bullet}{\varphi}(t)\,\overrightarrow{u}$ se numeşte *vectorul viteză de rotaţie al rigidului.*

Dacă unghiul φ de rotaţie este aşa de mic că se poate neglija pătratul său, adică avem $\cos\varphi\approx 1,\sin\varphi\approx\varphi$, atunci rotitul lui $\overrightarrow{x}$ în jurul axei de versor $\overrightarrow{u}$ cu unghiul mic φ este

$$R(\overrightarrow{u},\varphi;\overrightarrow{x})=\overrightarrow{x}+\varphi\,\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{x}.$$

In acest caz avem comutativitate şi asociativitate chiar pentru rotaţii în jurul unor axe diferite. Ultima formulă are multiple aplicaţii.

1.10 Exerciţii privind calculul vectorial

1. Să se găsească condiţia ca trei vectori $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ să poată forma un triunghi.

2. Să se demonstreze că se poate construi un triunghi ale cărui laturi să fie egale şi paralele cu medianele unui triunghi dat ABC.

3. Să se arate că un patrulater ale cărui diagonale se taie în părţi egale este un paralelogram.

4. Să se găsească semnificaţia geometrică a ecuaţiei $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$, $\lambda\in\mathbf{R}$.

5. Să se arate că trei puncte A,B,M cu vectorii de poziţie $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{r}$ sunt colineare dacă şi numai dacă există λ,μ astfel încât $\overrightarrow{r}=\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b}$, $\lambda+\mu=1$.

6. Să se arate că patru puncte A,B,C,M cu vectorii de poziţie $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{r}$ sunt coplanare dacă şi numai dacă există λ,μ,ν astfel încât $\overrightarrow{r}=\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b}+\nu\overrightarrow{c}$, $\lambda+\mu+\nu=1$.

7. Să se demonstreze vectorial teoremele liniilor mijlocii în triunghi şi trapez.

8. Să se demonstreze vectorial concurenţa medianelor unui triunghi.

9. Să se demonstreze vectorial teorema bisectoarei.

10. Să se demonstreze vectorial concurenţa bisectoarelor într-un triunghi.

11. Să se demonstreze vectorial teorema lui Menelaus: trei puncte M, N, P de pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC sunt colineare dacă şi numai dacă $\frac{AM}{MB}\frac{BN}{NC}\frac{CP}{PA} = -1$, segmentele considerându-se orientate.

12. Să se demonstreze teorema lui Ceva: dreptele AM, BN, CP care unesc vârfurile unui triunghi ABC cu punctele M, N, P de pe laturile BC, CA, AB sunt concurente dacă şi numai dacă $\frac{BM}{MC}\frac{CN}{NA}\frac{AP}{PB} = +1$.

13. Să se demonstreze că mijloacele diagonalelor unui patrulater complet $ABCDEF$ sunt colineare (E, F sunt intersecţiile perechilor de laturi opuse, EF este şi ea diagonală).

14. Să se demonstreze că dacă dreptele care unesc vârfurile a două triunghiuri sunt concurente (triunghiuri omologice) atunci laturile triunghiurilor se taie două câte două în puncte colineare.

15. Să se arate că dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru sunt concurente.

16. Să se demonstreze că vectorii $n\overrightarrow{c} - p\overrightarrow{b}, p\overrightarrow{a} - m\overrightarrow{c}, m\overrightarrow{b} - n\overrightarrow{a}$ sunt coplanari.

17. Să se arate că fiind date punctele $M_1, M_2, ..., M_n$ şi "masele" $m_1, m_2, ..., m_n$ astfel încât $m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 0$ există un punct unic G *centrul maselor* sau *baricentrul* astfel încât $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + ... + m_n\overrightarrow{GM_n} = 0$. Să se determine vectorul de poziţie al lui G în funcţie de vectorii de poziţie ai punctelor.

18. Să se arate că centrul maselor unui sistem este centrul maselor sistemului format din centrele maselor părţilor sistemului.

19. Punctul $M(\overrightarrow{r})$ de masă m este supus atracţiei punctelor fixe $M_1(\overrightarrow{r_1})$, $M_2(\overrightarrow{r_2})$, ..., $M_n(\overrightarrow{r_n})$, forţa de atracţie fiind proporţională cu distanţa la aceste puncte, cu masele lor $m_1, m_2, ..., m_n$ şi cu masa m. Să se găsească forţa rezultantă şi poziţia de echilibru.

20. Să se demonstreze vectorial teorema cosinusului.

21. Să se demonstreze vectorial teorema celor trei perpendiculare.

22. Să se demonstreze egalităţile:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}) &= \overrightarrow{a}^2-\overrightarrow{b}^2,\\ (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})^2+(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})^2 &= 2(\overrightarrow{a}^2+\overrightarrow{b}^2),\\ (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})^2-(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})^2 &= 4\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}.\end{aligned}$$

Să se dea interpretarea geometrică.

23. Să se deducă vectorial formula cosinusului sumei a două unghiuri.

24. Să se arate că vectorul $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c})-\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})$ este perpendicular pe $\overrightarrow{c}$.

25. Să se arate că înălţimile unui triunghi sunt concurente.

26. Să se arate că dacă într-un tetraedru două perechi de muchii opuse sunt perpendiculare, atunci şi a treia pereche de muchii este formată din drepte perpendiculare.

27. Să se demonstreze teorema lui Euler: într-un patrulater suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor plus de patru ori pătratul segmentului ce uneşte mijloacele diagonalelor.

28. Să se demonstreze că dacă G este centrul maselor sistemului de puncte M_1, M_2, ..., M_n cu masele $m_1, m_2, ..., m_n$, $m_1+m_2+...+m_n\neq 0$, atunci oricare ar fi punctul M are loc *relaţia lui Leibniz*

$$m_1\overrightarrow{MM_1}^2+m_2\overrightarrow{MM_2}^2+...+m_n\overrightarrow{MM_n}^2=(m_1+m_2+...+m_n)\overrightarrow{MG}^2+$$

$$+m_1\overrightarrow{M_1G}^2+m_2\overrightarrow{M_2G}^2+...+m_n\overrightarrow{M_nG}^2.$$

29. Să se găsească locul punctelor M din spaţiu pentru care

$$m_1\overrightarrow{MM_1}^2+m_2\overrightarrow{MM_2}^2+m_3\overrightarrow{MM_3}^2=constant$$

M_1, M_2, M_3 fiind trei puncte fixe şi m_1, m_2, m_3 numere date.

30. Să se arate că $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=-2\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$. Interpretare geometrică.

31. Să se arate că $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$. Să se deducă teorema sinusurilor într-un triunghi.

32. Să se deducă formula lui Heron pentru aria unui triunghi.

33. Să se arate că necesar şi suficient ca trei puncte de vectori de poziţie $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_3}$ să fie colineare este ca $\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_2}\times\overrightarrow{r_3}+\overrightarrow{r_3}\times\overrightarrow{r_1}=0$.

34. Fie $\overrightarrow{v}$ un vector aplicat în A şi un punct oarecare O. Se numeşte *moment al vectorului* $\overrightarrow{v}$ faţă de O expresia $M_O(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OA} \times v$.

a) Să se arate că momentul are sens dacă $\overrightarrow{v}$ se deplasează pe suportul său;

b) Să se studieze cum se schimbă momentul când se schimbă originea O;

c) Să se demonstreze teorema lui Varignon: momentul sumei mai multor vectori aplicaţi în acelaşi punct este egal cu suma momentelor vectorilor.

35. Fiind dat sistemul de vectori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$ aplicaţi în punctele de $M_1, M_2, ..., M_n$ de vectori de poziţie $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, ..., \overrightarrow{r_n}$ în raport cu originea O, se numeşte moment rezultant al sistemului de vectori în raport cu originea O vectorul

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{v_2} + ... + \overrightarrow{r_n} \times \overrightarrow{v_n}.$$

Rezultanta sistemului este vectorul $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + ... + \overrightarrow{v_n}$.

a) Să se arate cum se schimbă momentul rezultant când se schimbă originea;

b) Să se arate că rezultanta $\overrightarrow{R}$ şi produsul scalar $\overrightarrow{M_O}\overrightarrow{R}$ nu depind de originea O (rezultanta $\overrightarrow{R}$ şi produsul scalar $\overrightarrow{M_O}\overrightarrow{R}$ se numesc invarianţii sistemului).

36. Să se arate că dacă un corp solid se roteşte în jurul unei axe OA cu viteza unghiulară ω, atunci viteza oricărui punct al său este $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$, unde $\overrightarrow{\omega}$ este vectorul de mărime ω dirijat după OA, având sensul de înaintare al burghiului când acesta s-ar roti odată cu corpul, iar $\overrightarrow{r}$ este vectorul de poziţie al punctului în raport cu originea O.

37. Să se deducă vectorial formula sinusului sumei a două unghiuri.

38. Să se stabilească relaţia

$$\overrightarrow{x} = \frac{\overrightarrow{a}\overrightarrow{x}}{\overrightarrow{a}^2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{\overrightarrow{a}^2}\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{a}).$$

Interpretare geometrică.

39. Să se arate că

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{d} \end{vmatrix}.$$

40. Să se deducă din relaţia de mai sus ($\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a}$) formula fundamentală a trigonometriei sferice

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

α, β, γ fiind unghiurile unui triunghi sferic, iar A unghiul diedru.

41. Să se calculeze $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d})$ în două moduri posibile. Să se deducă expresiile componentelor unui vector după o bază.

42. Să se arate că $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$. Să se deducă de aici formula sinusurilor din trigonometria sferică

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin C}{\sin \gamma}.$$

43. Să se demonstreze egalitatea

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})(\overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b'}, \overrightarrow{c'}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\overrightarrow{a'} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{b'} & \overrightarrow{a}\overrightarrow{c'} \\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{a'} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{b'} & \overrightarrow{b}\overrightarrow{c'} \\ \overrightarrow{c}\overrightarrow{a'} & \overrightarrow{c}\overrightarrow{b'} & \overrightarrow{c}\overrightarrow{c'} \end{vmatrix}.$$

44. Să se rezolve ecuaţia vectorială $\overrightarrow{x}\overrightarrow{a} = m$. Interpretare geometrică. ($\overrightarrow{x} = \frac{m}{\overrightarrow{a}^2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}$ arbitrar)

45. Să se rezolve ecuaţia vectorială $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \neq 0$, $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$. Interpretare geometrică. Ind. $\overrightarrow{x} = \frac{\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}}{\overrightarrow{a}^2} + \mu \overrightarrow{a}$, μ arbitrar.

46. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a}\overrightarrow{x} &= m, \\ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \neq 0, \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}. \end{aligned}$$

Ind. $\overrightarrow{x} = \frac{m}{\overrightarrow{a}^2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{\overrightarrow{a}^2}\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$.

47. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a}\overrightarrow{x} &= m, \\ \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}. \end{aligned}$$

Interpretare geometrică. Ind. $\overrightarrow{x} = \frac{m}{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}\overrightarrow{b} + \frac{1}{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$.

48. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a}\overrightarrow{x} &= m, \\ \overrightarrow{b}\overrightarrow{x} &= n, \\ \overrightarrow{c}\overrightarrow{x} &= p. \end{aligned}$$

Ind. Se rezolvă mai întâi sistemele de forma $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{x}=1$, $\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}=0$, $\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{x}=0$, etc. Soluţiile acestora $\overrightarrow{a^*}$, $\overrightarrow{b^*}$, $\overrightarrow{c^*}$ se numesc *vectorii reciproci ai vectorilor* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Soluţia $\overrightarrow{x}=m\overrightarrow{a^*}+n\overrightarrow{b^*}+p\overrightarrow{c^*}$.

49. Fiind dat un sistem de vectori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$ dispuşi în punctele $M_1, M_2, ..., M_n$ se numeşte *axa centrală a sistemului* locul punctelor în raport cu care momentul rezultant este paralel cu rezultanta sistemului $\overrightarrow{R}$. Să se arate că ecuaţia axei centrale este

$$\overrightarrow{r}=\frac{\mu\overrightarrow{R}-\overrightarrow{M_0}\times\overrightarrow{R}}{\overrightarrow{R}^2}, \mu\in\mathbf{R}.$$

CAPITOLUL 2

DREPTE ŞI PLANE

2.1 Ecuaţiile curbelor şi suprafeţelor

2.1.1 Definiţii

Incepem printr-un exemplu simplu. Presupunem că în spaţiu este dat un sistem de coordonate rectangular $Oxyz$. Considerăm sfera de rază R cu centrul în punctul $C(x_0, y_0, z_0)$. Sfera este locul geometric al punctelor situate la distanţa R de centrul său. Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare al sferei. Egalitatea $|\overrightarrow{CM}| = R$ se scrie

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

sau ridicând la pătrat

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Evident, această relaţie este verificată de coordonatele punctelor sferei şi numai de ele. Ea poate fi considerată ca o transpunere în coordonate a definiţiei sferei. Ea se numeşte ecuaţia sferei în sistemul de coordonate dat.

Generalizând avem următoarea

Definiţia 2.1.1 *Fiind dat un sistem de coordonate $Oxyz$, egalitatea $F(x, y, z) = 0$ se numeşte ecuaţia suprafeţei S în acest sistem dacă coordonatele tuturor punctelor suprafeţei S verifică această egalitate, iar coordonatele punctelor nesituate pe S nu verifică această egalitate.*

Uneori vom spune că egalitatea $F(x, y, z) = 0$ defineşte suprafaţa S. Odată ales un sistem de coordonate, pentru a obţine ecuaţia unei suprafeţe trebuie să exprimăm prin coordonate definiţia geometrică a suprafeţei. In alt sistem de coordonate, aceeaşi suprafaţă va avea altă ecuaţie.

Vom observa că nu totdeauna locul geometric al punctelor ale căror coordonate satisfac ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ este o suprafaţă în sensul obişnuit al acestui cuvânt. De exemplu, ecuaţia $x^2+y^2+z^2+1 = 0$ nu este verificată de niciun punct, ecuaţia $y^2+z^2 = 0$ defineşte axa absciselor, ecuaţia $x = |x|$ defineşte un semispaţiu. Cu toate acestea, vom vorbi de cele mai multe ori de suprafaţa definită de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$.

Vom avea o definiţie analoagă în plan:

Definiţia 2.1.2 *Egalitatea $F(x, y) = 0$ se numeşte ecuaţia curbei C în sistemul de coordonate Oxy din plan dacă ea este verificată de coordonatele tuturor punctelor de pe C şi nu este verificată de coordonatele punctelor nesituate pe C.*

De exemplu, ecuaţia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

este ecuaţia cercului de rază R cu centrul $C(x_0, y_0)$.

Definiţia 2.1.3 *Două ecuaţii se numesc echivalente dacă din prima ecuaţie rezultă a doua şi din a doua ecuaţie rezultă prima.*

Este evidentă

Teorema 2.1.1 *Intr-un sistem de coordonate dat $Oxyz$ (Oxy) două ecuaţii reprezintă aceeaşi suprafaţă (curbă) dacă şi numai dacă sunt echivalente.*

Deasemenea

Teorema 2.1.2 *Dacă în sistemul de coordonate $Oxyz$ suprafeţele S_1, S_2 au ecuaţiile $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, atunci punctele intersecţiei lor şi numai ele satisfac sistemul de ecuaţii*

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0, \\ F_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

Din această teoremă rezultă că în spaţiu curbele de intersecţie a două suprafeţe se definesc printr-un sistem de două ecuaţii.

2.1.2 Ecuaţii parametrice ale curbelor şi suprafeţelor

O curbă în plan sau în spaţiu poate fi dată şi altfel. O curbă C poate fi considerată ca traiectoria unui punct mobil. In fiecare moment t este cunoscut vectorul de poziţie al punctului $\overrightarrow{r}(t)$ sau coordonatele punctului $x(t), y(t), z(t)$.

Definiţia 2.1.4 *Ecuaţia*

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}, t \in [t_1, t_2],$$

se numeşte ecuaţia vectorial parametrică a curbei parametrizate C dacă pentru fiecare punct de pe curba C şi numai pentru acestea există $t \in [t_1, t_2]$ astfel ca vectorul de poziţie al acestui punct să fie $\overrightarrow{r}(t)$. Ecuaţiile

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), t \in [t_1, t_2] \end{aligned}$$

se numesc ecuaţiile scalar parametrice ale curbei C.

Vom observa că ecuaţiile parametrice presupun şi o origine a curbei, un sens de parcurgere a curbei şi o extremitate a curbei.

Definiţii analoage avem în plan. De exemplu, $\overrightarrow{r} = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}, t \in [0, 2\pi)$ este ecuaţia vectorial parametrică a cercului de rază 1 cu centrul în origine parcurs începând de pe axa Ox în sens direct trigonometric până în acelaşi punct de pe Ox.

Definiţia 2.1.5 *Ecuaţia*

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{i} + y(u, v)\overrightarrow{j} + z(u, v)\overrightarrow{k}, (u, v) \in D_{uv},$$

se numeşte ecuaţia vectorial parametrică a suprafeţei parametrizate S dacă pentru orice punct al lui S şi numai pentru acestea există $(u, v) \in D_{uv}$ astfel ca vectorul de poziţie al punctului să fie $\overrightarrow{r}(u, v)$. Ecuaţiile

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v), (u, v) \in D_{uv} \end{aligned}$$

se numesc ecuaţiile scalar parametrice ale suprafeţei parametrizate S. Aici D_{uv} este un domeniu din $\mathbf{R}^2$.

De exemplu, ecuaţia

$$\overrightarrow{r} = R\sin v\cos u\overrightarrow{i} + R\sin v\sin u\overrightarrow{j} + R\cos v\overrightarrow{k}, (u,v) \in [0,2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

este ecuaţia vectorial parametrică a sferei de rază R cu centrul în origine, u fiind longitudinea punctului de pe sferă, v fiind colatitudinea punctului de pe sferă.

2.1.3 Curbe şi suprafeţe algebrice

Definiţia 2.1.6 *Se numeşte suprafaţă algebrică suprafaţa care într-un anumit sistem de coordonate rectangular $Oxyz$ are o ecuaţie $F(x,y,z) = 0$, unde $F(x,y,z)$ este un polinom în coordonatele x,y,z; gradul polinomului $F(x,y,z)$ se numeşte ordinul suprafeţei algebrice.*

O sferă este o suprafaţă algebrică de ordinul doi.

Definiţia 2.1.7 *Se numeşte curbă algebrică curba care într-un anumit sistem de coordonate Oxy are o ecuaţie $F(x,y) = 0$, unde $F(x,y)$ este un polinom în coordonatele x,y; gradul polinomului $F(x,y)$ se numeşte ordinul curbei algebrice.*

Un cerc este o curbă algebrică de ordinul întâi.

Din formulele de schimbare a coordonatelor la schimbarea sistemelor rectangulare rezultă că ordinul unei suprafeţe (curbe) algebrice este un invariant la schimbarea sistemelor de coordonate:

Teorema 2.1.3 *Dacă o suprafaţă (curbă) are într-un sistem de coordonate rectangular o ecuaţie de forma $F(x,y,z) = 0$ ($F(x,y) = 0$) unde F este un polinom de gradul g, în orice alt sistem de coordonate rectangular are o ecuaţie de aceeaşi formă de acelaşi grad.*

2.2 Ecuaţiile planelor şi dreptelor

2.2.1 Suprafeţe şi curbe de ordinul întâi

Demonstrăm acum că orice plan este o suprafaţă algebrică de ordinul întâi şi invers orice suprafaţă algebrică de ordinul întâi este un plan:

Teorema 2.2.1 *In orice sistem cartezian în spaţiu $Oxyz$ orice plan are o ecuaţie de gradul întâi cu cel puţin un coeficient al coordonatelor nenul*

$$Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Invers, orice asemenea ecuaţie de gradul întâi este ecuaţia unui plan.

Dacă avem un plan, alegem un sistem cartezian $Oxyz$ în care originea O şi primii doi vectori ai sistemului $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ să fie în acel plan, iar $\overrightarrow{e_3}$ oricum. In acest sistem, evident, planul are ecuaţia $z = 0$. Rezultă că în orice alt sistem de coordonate planul dat are o ecuaţie de gradul întâi cu cel puţin un coeficient al coordonatelor nenul.

Invers, fie o ecuaţie de gradul întâi într-un sistem cartezian

$$Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Să găsim locul geometric al punctelor care verifică această ecuaţie. Intr-un sistem de coordonate rectangular $O'x'y'z'$ ecuaţia dată va deveni

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0, A'^2 + B'^2 + C'^2 \neq 0.$$

Pentru că nu toţi coeficienţii A', B', C' sunt nuli există cel puţin un punct $M_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ care să verifice ecuaţia (de exemplu, dacă $A' \neq 0$ se poate lua punctul de coordonate $(-\frac{D'}{A'}, 0, 0))$:

$$A'x'_0 + B'y'_0 + C'z'_0 + D' = 0.$$

Prin scădere avem

$$A'(x' - x'_0) + B'(y' - y'_0) + C'(z' - z'_0) = 0.$$

Cum sistemul $O'x'y'z'$ este rectangular, înseamnă că vectorul de componente $x' - x'_0, y' - y'_0, z' - z'_0$ este ortogonal pe vectorul $\overrightarrow{n}$ de componente A', B', C'. Dacă punctul

$M(x', y', z')$ aparţine planului care trece prin M_0 şi este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{n}$ atunci ecuaţia este verificată. Invers, dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{n}$ atunci punctul M aparţine planului. Deci coordonatele punctului M verifică ultima ecuaţie şi deci şi cea iniţială dacă şi numai dacă el se găseşte în planul determinat mai sus.

Am demonstrat totodată:

Teorema 2.2.2 *Intr-un sistem de coordonate rectangular $Oxyz$ vectorul $\overrightarrow{n}$ de componente (A, B, C) este perpendicular pe planul de ecuaţie $Ax + By + Cz + D = 0$.*

In plan au loc teoremele

Teorema 2.2.3 *In orice sistem cartezian în plan Oxy orice dreaptă are o ecuaţie de gradul întâi cu cel puţin un coeficient al coordonatelor nenul*

$$Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0.$$

Invers, orice asemenea ecuaţie de gradul întâi este ecuaţia unei drepte.

Teorema 2.2.4 *Intr-un sistem de coordonate rectangular Oxy vectorul $\overrightarrow{n}$ de componente (A, B) este perpendicular pe dreapta de ecuaţie $Ax + By + C = 0$.*

2.2.2 Ecuaţii ale dreptei şi planului

O dreaptă (în plan sau în spaţiu) este determinată dacă se cunoaşte un punct al său M_0 şi un vector $\overrightarrow{a}$ cu care dreapta este paralelă. Aceştia pot fi daţi în moduri diferite, dar odată aleşi îi vom numi *punctul iniţial al dreptei* şi *vectorul director al dreptei.* Presupunem că avem un sistem cartezian în care punctul iniţial M_0 are vectorul de poziţie $\overrightarrow{r_0}$. Un punct oarecare M are vectorul de poziţie $\overrightarrow{r}$. Punctul M aparţine dreptei dacă şi numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este paralel cu vectorul director $\overrightarrow{a}$, adică dacă şi numai dacă există un număr real t astfel că $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = t\overrightarrow{a}$. Ecuaţia

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{a}, t \in \mathbf{R}$$

este ecuaţia vectorial parametrică a dreptei. Dacă (x_0, y_0, z_0) sunt coordonatele punctului iniţial M_0 şi (l, m, n) sunt componentele vectorului director $\overrightarrow{a}$, ecuaţiile scalar

parametrice ale dreptei sunt

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tl, \\ y &= y_0 + tm, \\ z &= z_0 + tn, t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Recunoaştem o dreaptă după ecuaţiile parametrice: acestea sunt ecuaţii de gradul întâi în parametru, termenul liber dând punctul iniţial, iar coeficientul parametrului dând vectorul director. Dacă parametrul parcurge numai un interval finit, avem ecuaţiile parametrice ale unui segment de dreaptă.

Vom conveni să lucrăm cu fracţii cu numitor nul, subînţelegând că de câte ori avem o asemenea fracţie în mod automat numărătorul ei trebuie să fie nul. Cu această convenţie prin eliminarea parametrului t din ecuaţiile scalar parametrice putem scrie ecuaţiile dreptei care trece printr-un punct iniţial şi are un vector director sub forma

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

O dreaptă este determinată şi dacă cunoaştem două puncte ale sale M_1, M_2 de vectori de poziţie $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$ sau de coordonate $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$. Evident un vector director este $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ şi ecuaţia vectorial parametrică a dreptei este

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + t(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}), t \in \mathbf{R}.$$

Eliminând parametrul avem ecuaţiile dreptei ce trece prin două puncte sub forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Vom observa că pentru o dreaptă în planul Oxy avem numai primele două ecuaţii scalar parametrice şi numai o singură ecuaţie scalară.

Un plan este determinat dacă cunoaştem un punct M_0 al său şi doi vectori $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ cu care planul este paralel. Un punct M aparţine planului dacă şi numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este coplanar cu vectorii $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ adică există numerele reale u_1, u_2 astfel că $\overrightarrow{M_0M} = u_1\overrightarrow{a_1} + u_2\overrightarrow{a_2}$. Dacă $\overrightarrow{r_0}$ este vectorul de poziţie al punctului M_0 şi $\overrightarrow{r}$ este vectorul de poziţie al punctului curent rezultă că ecuaţia

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + u_1\overrightarrow{a_1} + u_2\overrightarrow{a_2}, (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$$

este ecuaţia vectorial parametrică a planului. Dacă (x_0, y_0, z_0) sunt coordonatele lui M_0 şi $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2)$ sunt componentele vectorilor $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ ecuaţiile scalar parametrice ale planului sunt

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u_1 l_1 + u_2 l_2, \\ y &= y_0 + u_1 m_1 + u_2 m_2, \\ z &= z_0 + u_1 n_1 + u_2 n_2, (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

Recunoaştem un plan după ecuaţiile parametrice pentru că acestea sunt de gradul întâi în doi parametri, termenul liber determină punctul planului, iar coeficienţii parametrilor determină vectorii cu care planul este paralel.

Prin eliminarea parametrilor sau scriind condiţia de coplanaritate a trei vectori obţinem ecuaţia planului care trece printr-un punct dat şi e paralel cu două direcţii date

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Există şi alte determinări geometrice ale unui plan care se pot reduce la determinarea precedentă. De exemplu, un plan este determinat de două puncteale sale M_1, M_2 de vectori de poziţie $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$ şi coordonate $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ şi de un vector $\overrightarrow{a}$ de componente (l, m, n) paralel cu planul. In acest caz ecuaţia vectorial parametrică a planului este

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + u_1(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) + u_2 \overrightarrow{a}, (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Eliminând parametrii avem ecuaţia planului care trece prin două puncte date şi e paralel cu o direcţie dată

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Planul este determinat şi când se cunosc trei puncte ale sale M_1, M_2, M_3 de coordonate $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$. Scriem numai ecuaţia scalară

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

In cazul particular când se cunosc punctele de intersecţie ale planului cu axele de coordonate $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ se obţine ecuaţia

$$bcx + cay + abz - abc = 0$$

sau dacă $abc \neq 0$ avem aşa numita *ecuaţie prin tăieturi*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Notăm că dacă planul de ecuaţie $Ax + By + Cz + D = 0$ nu trece prin origine, $D \neq 0$, găsim tăieturile planului pe axele de coordonate împărţind ecuaţia cu $-D$:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} - 1 = 0.$$

2.2.3 Condiţia de paralelism a două plane

Considerăm în sistemul de coordonate rectangular $Oxyz$ ecuaţiile a două plane P_1, P_2

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2Z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Vectorii normali la cele două plane sunt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n_1} &= A_1\overrightarrow{i} + B_1\overrightarrow{j} + C_1\overrightarrow{k}, \\ \overrightarrow{n_2} &= A_2\overrightarrow{i} + B_2\overrightarrow{j} + C_2\overrightarrow{k}. \end{aligned}$$

Cele două plane sunt paralele dacă şi numai dacă cei doi vectori normali sunt colineari, adică

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Dacă avem şi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

atunci cele două ecuaţii reprezintă acelaşi plan.

Dacă matricea

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

are rangul doi cei doi vectori normali nu sunt paraleli şi deci cele două plane se intersectează după o dreaptă.

Notăm că şi într-un sistem cartezian oarecare se menţin condiţiile de mai sus.

2.2.4 Dreapta ca intersecţie a două plane

Două plane P_1, P_2 de ecuaţii

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2Z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

se intersectează după o dreaptă dacă rangul matricei

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

este doi. Se poate găsi totdeauna un punct iniţial al dreptei. De exemplu, dacă minorul $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ este nenul, se poate da lui z o valoare arbitrară z_0 şi se rezolvă sistemul

$$\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 &= 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

găsind punctul iniţial (x_0, y_0, z_0). Cum un vector director al dreptei este produsul vectorial al vectorilor normali, rezultă că se obţin componentele l, m, n ale unui vector director al dreptei scriind că acestea sunt proporţionale cu minorii extraşi din matricea de mai sus scoţând câte o coloană şi alternându-le semnele

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{m}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

2.2.5 Fascicol de plane

Definiţia 2.2.1 *Fiind date două plane P_1, P_2 care se intersectează după o dreaptă D se numeşte fascicol de plane cu baza P_1, P_2 mulţimea tuturor planelor care trec prin dreapta de intersecţie D; dreapta D se numeşte axa fascicolului.*

Teorema 2.2.5 *Fie două plane P_1, P_2 de ecuaţii*

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2Z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

concurente după o dreaptă. Oricare ar fi numerele reale α, β nenule simultan, ecuaţia

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

este ecuaţia unui plan din fascicolul cu baza P_1, P_2 şi invers orice plan din fascicol are o ecuaţie de această formă.

Scriem ecuaţia sub forma

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2)z + \alpha D_1 + \beta D_2 = 0.$$

Aceasta este ecuaţia unui plan pentru că nu toţi coeficienţii coordonatelor pot fi nuli pentru că ar rezulta $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Este evident că acest plan conţine dreapta de intersecţie a celor două plane. Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct nesituat pe dreapta de intersecţie a celor două plane, din relaţia

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0$$

se pot determina α şi β ca planul să treacă prin punctul M_0. Deci teorema este demonstrată. Luând $\beta = 0$ respectiv $\alpha = 0$ avem cele două plane de bază ale fascicolului. Dacă se împarte ecuaţia cu α şi notăm $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ se poate scrie ecuaţia fascicolului sub forma

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2Z + D_2) = 0.$$

Sub această formă nu regăsim planul P_2 pentru valori finite ale lui λ.

Exemplul 2.2.5.1 *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin dreapta de intersecţie a planelor*

$$\begin{aligned} x - y + z - 3 &= 0, \\ x + y - z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

şi este paralel cu axa Ox.

Planul căutat face parte din fascicolul

$$(\alpha + \beta)x + (-\alpha + \beta)y + (\alpha - \beta)z - 3\alpha + \beta = 0.$$

Scriind că planul este paralel cu Ox $\alpha+\beta=0$ putem lua $\alpha=-1, \beta=1$ şi avem ecuaţia

$$2y-2z+4=0$$

sau

$$y-z+2=0.$$

2.3 Probleme metrice

2.3.1 Distanţa de la un punct la un plan

Fie un sistem de coordonate rectangular $Oxyz$ şi un plan oarecare Π. Ducem din O o dreaptă perpendiculară pe plan care va tăia planul în punctul P. Notăm cu $\overrightarrow{n}$ versorul lui $\overrightarrow{OP}$. Dacă planul trece prin origine luăm ca versor $\overrightarrow{n}$ unul din versorii perpendiculari pe plan. Dacă notăm cu α, β, γ unghiurile făcute de versorul $\overrightarrow{n}$ cu axele de coordonate şi cu p mărimea vectorului $\overrightarrow{OP}$, atunci

$$\overrightarrow{n} = \cos\alpha \overrightarrow{i} + \cos\beta \overrightarrow{j} + \cos\gamma \overrightarrow{k},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{n}.$$

Dacă $M(x,y,z)$ este un punct oarecare al planului, avem

$$OL = p = proiec\backslash c\{t\}ia_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{n} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

şi deci

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Această ecuaţie verificată de orice punct al planului se numeşte *ecuaţia normală a planului* Π.

Planul Π împarte spaţiul în două semispaţii. Convenim să numim pozitiv semispaţiul spre care este îndreptat versorul $\overrightarrow{n}$ şi pe celălalt semispaţiu negativ. Notăm că originea este totdeauna în semispaţiul negativ.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al spaţiului şi d distanţa de la punctul M_0 la planul Π. Vom numi *abaterea punctului* M_0 *de la planul* Π numărul δ egal cu distanţa d

dacă M_0 este în semispaţiul pozitiv şi egal cu $-d$ dacă M_0 este în semispaţiul negativ. Dacă notăm cu P_0 proiecţia ortogonală a punctului M_0 pe dreapta OP avem

$$\delta = PP_0 = OP_0 - OP = \overrightarrow{OM_0}\,\overrightarrow{n} - p = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p.$$

Rezultă că distanţa de la punctul M_0 la planul Π este

$$d = |\delta| = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|.$$

Deci am arătat că abaterea unui punct de la un plan este egală cu valoarea obţinută prin înlocuirea coordonatelor punctului în membrul stâng al ecuaţiei normale a planului, iar distanţa de punct la plan este egală cu modulul valorii obţinute prin înlocuirea coordonatelor punctului în membrul stâng al ecuaţiei normale a planului.

Fie acum ecuaţia generală a unui plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

şi să găsim ecuaţia sa normală

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

Cum cele două ecuaţii reprezintă acelaşi plan trebuie să avem

$$\lambda A = \cos\alpha, \lambda B = \cos\beta, \lambda C = \cos\gamma, \lambda D = -p.$$

Rezultă

$$\lambda = -\operatorname{sgn}(D)\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Rezultă că abaterea punctului M_0 de la planul Π cu ecuaţia generală este

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-\operatorname{sgn}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

iar distanţa este

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Din demonstraţia dată rezultă că dacă înlocuim coordonatele a două puncte în membrul stâng al ecuaţiei unui plan, obţinem numere de acelaşi semn dacă punctele sunt situate în acelaşi semispaţiu şi obţinem numere de semn contrar dacă punctele sunt situate în semispaţii diferite.

2.3.2 Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie o dreaptă determinată de punctul iniţial $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorul director $\overrightarrow{a}$ de componente (l, m, n). Pentru a găsi distanţa d de la punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ la dreaptă vom observa că această distanţă d apare ca înălţime în paralelogramul construit pe vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{M_0M_1}$ dispuşi în M_0. Rezultă

$$d = \frac{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\overrightarrow{a}|}.$$

Cum

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{M_0M_1} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ l & m & n \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$$

rezultă

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} m & n \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & n \\ x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

2.3.3 Calculul unghiului între două drepte

Unghiul φ între dreptele cu vectorii directori $\overrightarrow{a_1}(l_1, m_1, n_1)$, $\overrightarrow{a_2}(l_2, m_2, n_2)$ este dat de relaţia

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

2.3.4 Calculul unghiului între două plane

Unghiul φ între planele de ecuaţii

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 Z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

este unghiul între normalele lor

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

2.3.5 Calculul unghiului dintre o dreaptă şi un plan

Unghiul φ între dreapta de vector director $\overrightarrow{a}(l.m,n)$ şi planul de ecuaţie

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

este complemenul unghiului dintre vectorul $\overrightarrow{a}$ şi vectorul normal la plan $\overrightarrow{n}(A,B,C)$

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

CAPITOLUL 3

SPAŢII VECTORIALE

3.1 Spaţiu vectorial

Definiţia 3.1.1 *Fie V o mulţime ale cărei elemente le vom nota prin litere latine mici $a, b, c, ..., x, y, z$ şi le vom numi vectori. Fie de asemenea un corp K ale cărui elemente le vom nota prin litere greceşti mici $\alpha, \beta, \gamma, ..., \xi, \zeta, \eta$ şi le vom numi scalari. Operaţiile din corpul K vor fi adunarea şi înmulţirea scalarilor şi vor fi notate aditiv şi multiplicativ. Elementul neutru la adunare în K va fi 0, iar elementul neutru la înmulţire va fi 1. In mod obişnuit corpul K va fi corpul numerelor reale $\mathbf{R}$ sau corpul numerelor complexe $\mathbf{C}$. Pe mulţimea V se defineşte o lege de compoziţie (o operaţie) internă numită adunarea vectorilor notată aditiv care face ca fiecărei perechi $(x, y) \in V \times V$ să-i corespundă elementul $x + y \in V$ şi o lege de compoziţie (operaţie) externă în raport cu corpul K numită înmulţirea vectorilor cu scalari care face ca fiecărei perechi $(\lambda, x) \in K \times V$ să-i corespundă elementul $\lambda x \in V$. Mulţimea V este un spaţiu vectorial (notat prescurtat sv) peste corpul K dacă*

- în raport cu operaţia de adunare V este un grup comutativ (abelian), adică
  - 1. $\forall x, y, z \in V : (x + y) + z = x + (y + z)$;
  - 2. $\exists 0 \in V$ astfel încât (prescurtat aî) $\forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$;
  - 3. $\forall x \in V, \exists -x \in V$ aî $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
  - 4. $\forall x, y \in V : x + y = y + x$;

- înmulţirea cu scalari satisface condiţiile
  - 1. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in V : \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
  - 2. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in V : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
  - 3. $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in V : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
  - 4. $\forall x \in V : 1x = x$.

Spaţiul vectorial peste **R** se numeşte s*paţiu vectorial real*, spaţiul vectorial peste **C** se numeşte s*paţiu vectorial complex*.

Teorema 3.1.1 *In orice spaţiu vectorial au loc proprietăţile*

- $\alpha)$ $\forall x \in V : 0x = 0$;
- $\beta)$ $\forall \lambda \in K : \lambda 0 = 0$;
- $\gamma)$ $\forall x \in V : (-1)x = -x$.

In adevăr, putem scrie $x + 0x = (1 + 0)x = 1x = x$ de unde $\alpha)$. Cum $\lambda x + \lambda 0 = \lambda(x + 0) = \lambda x$ rezultă $\beta)$. Din $x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = 0$ rezultă $\gamma)$.

Exemple de spaţii vectoriale:

Exemplul 3.1.0.1 *Orice corp K poate fi considerat spaţiu vectorial peste el însuşi considerând elementele sale atât ca vectori cât şi ca scalari.*

Exemplul 3.1.0.2 *Corpul numerelor complexe* **C** *poate fi considerat ca spaţiu vectorial peste* **R** *sau peste el însuşi.*

Exemplul 3.1.0.3 *Mulţimea $P(K)$ a polinoamelor de o nedeterminată cu operaţia de adunare a polinoamelor şi operaţia de înmulţire a polinoamelor cu elemente din K este un spaţiu vectorial.*

Exemplul 3.1.0.4 *Mulţimea $F(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ a funcţiilor reale de variabilă reală cu operaţiile obişnuite este un spaţiu vectorial real.*

Exemplul 3.1.0.5 *Dacă* $V_1, V_2, ..., V_n$ *sunt spaţii vectoriale peste corpul* K *atunci produsul cartezian* $V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$ *înzestrat cu operaţiile*

$$\begin{aligned} \forall(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) &\in V_1 \times V_2 \times ... \times V_n : \\ (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \lambda &\in K, \forall(x_1, x_2, ..., x_n) \in V_1 \times V_2 \times ... \times V_n : \\ \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \end{aligned}$$

constituie un spaţiu vectorial peste K*. In particular dacă* $V_1 = V_2 = ... = V_n = K$*, vom avea spaţiul* K^n *al şirurilor finite* $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *de câte* n *elemente din* K*.* K^n *se numeşte spaţiul aritmetic cu n dimensiuni.*

Exemplul 3.1.0.6 *Mulţimea vectorilor liberi din spaţiul geometriei elementare formează un spaţiu vectorial real.*

Exemplul 3.1.0.7 *Mulţimea vectorilor de poziţie ai punctelor spaţiului geometriei elementare în raport cu o origine* O *formează un spaţiu vectorial real. Pe acesta îl vom avea în vedere în multe exemplificări.*

Exemplul 3.1.0.8 *Mulţimea* SF *a şirurilor recurente de ordinul doi de tipul lui Fibonacci adică a şirurilor reale* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ *unde pentru orice* $n \geq 3$ *are loc relaţia* $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ *cu operaţiile obişnuite de adunare a şirurilor şi înmulţire cu numere a şirurilor constituie un spaţiu vectorial real.*

3.1.1 Subspaţii vectoriale

Definiţia 3.1.2 *O submulţime* V' *a spaţiului vectorial* V *peste corpul* K *este un subspaţiu vectorial (notat prescurtat ssv) al lui* V *dacă* V' *este spaţiu vectorial în raport cu cele două operaţii restricţionate la* V'*.*

Sunt evidente următoarele teoreme:

Teorema 3.1.2 *O condiţie necesară şi suficientă ca submulţimea* $V' \subset V$ *a sv* V *peste corpul* K *să fie ssv este ca* V' *să fie stabilă în raport cu cele două operaţii, adică*

- a) $\forall x, y \in V' : x + y \in V'$;
- b) $\forall \lambda \in K, \forall x \in V' : \lambda x \in V'$.

Teorema 3.1.3 *O condiţie necesară şi suficientă ca submulţimea $V' \subset V$ a sv V peste corpul K să fie ssv este ca $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in V' : \lambda x + \mu y \in V'$.*

Exemple de ssv:

Exemplul 3.1.1.1 *In orice sv V mulţimea $\{0\}$ şi însuşi V sunt ssv, numite ssv improprii.*

Exemplul 3.1.1.2 *Mulţimea $P_n(K)$ a polinoamelor de o nedeterminată cu coeficienţi din corpul K de grad cel mult n este un ssv al sv $P(K)$.*

Exemplul 3.1.1.3 *Mulţimile $F_p(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $F_i(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ale funcţiilor reale de variabilă reale pare respectiv impare sunt ssv ale sv $F(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.*

Exemplul 3.1.1.4 *Mulţimea vectorilor liberi paraleli cu un plan dat este un ssv al sv al vectorilor liberi.*

Exemplul 3.1.1.5 *Mulţimea vectorilor de poziţie ai punctelor dintr-un plan care trece prin origine este un ssv al sv al vectorilor de poziţie din spaţiu.*

Definiţia 3.1.3 *Dacă $x_1, x_2, ..., x_p \in svV$ atunci elementul $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$ se numeşte combinaţie lineară a elementelor $x_1, x_2, ..., x_p$ cu coeficienţii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$.*

Are loc evident teorema:

Teorema 3.1.4 *Dacă S este o submulţime de elemente din sv V, atunci mulţimea elementelor care sunt combinaţii lineare de elemente din S este un ssv al lui V.*

Definiţia 3.1.4 *Subspaţiul format din combinaţiile lineare de elemente din S se numeşte subspaţiul vectorial generat de S şi îl vom nota prin $[S]$.*

Definiţia 3.1.5 *Dacă V' este ssv al lui V, $S \subset V'$ şi $[S] = V'$ atunci S se numeşte sistem de generatori pentru V'.*

Exemplul 3.1.1.6 *Vectorii* $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ *constituie un sistem de generatori pentru* $\mathbf{R}^3$ *pentru că orice vector* $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ *din* $\mathbf{R}^3$ *se scrie* $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$.

Teorema 3.1.5 *Dacă* V', V'' *sunt ssv ale sv* V *atunci intersecţia* $V' \cap V''$ *este tot ssv al lui* V, *numit subspaţiul intersecţie.*

In adevăr, $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in V' \cap V''$ avem $\lambda x + \mu y \in V' \cap V''$.

Definiţia 3.1.6 *Două ssv* V', V'' *ale sv* V *se numesc independente dacă* $V' \cap V'' = \{0\}$.

Exemplul 3.1.1.7 *Subspaţiile* $F_p(\mathbf{R}, \mathbf{R}), F_i(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *sunt subspaţii vectoriale independente ale lui* $F(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *pentru că intersecţia lor este formată numai din funcţia nulă.*

Se vede imediat că intersecţia a mai multor subspaţii este tot un subspaţiu. Dacă S este o submulţime a sv V atunci orice subspaţiu al lui V care conţine mulţimea S trebuie să conţină subspaţiul generat de S. Rezultă

Teorema 3.1.6 *Ssv* $[S]$ *este intersecţia tuturor subspaţiilor vectoriale ale lui* V *care conţin pe* S.

Rezultă că $[S]$ este cel mai mic subspaţiu care conţine pe S. $[S]$ se mai numeşte şi *înfăşurătoarea lineară* a lui S.

Definiţia 3.1.7 *Dacă* V', V'' *sunt ssv ale sv* V, *atunci ssv generat de* $V' \cup V''$ *se numeşte subspaţiul sumă al lui* V' *şi* V'' *şi se notează prin* $V' + V'' : V' + V'' = [V' \cup V'']$.

Teorema 3.1.7 $V' + V''$ *coincide cu mulţimea* V^* *a elementelor* x *din* V *care se pot scrie sub forma* $x = x' + x''$ *cu* $x' \in V', x'' \in V''$.

In adevăr, evident $V^* \subset V' + V'' = [V' \cup V'']$. Invers, dacă $x \in V' + V''$ atunci $\exists x' \in V', \exists x'' \in V''$ aî $x = x' + x''$, adică $V' + V'' \subset V^*$.

Exemplul 3.1.1.8 *In* K^3 *considerăm ssv*

$$\begin{aligned} V' &= \{(\xi_1, 0, 0), \xi_1 \in K\} \\ V'' &= \{(0, 0, \xi_3), \xi_3 \in K\}; \end{aligned}$$

atunci $V' + V'' = \{(\xi_1, 0, \xi_3), \xi_1, \xi_3 \in K\}$.

Definiţia 3.1.8 *Suma de ssv $V'+V''$ se numeşte directă dacă orice vector x din $V'+V''$ se scrie în mod unic sub forma $x = x' + x''$ cu $x' \in V', x'' \in V''$. In acest caz se scrie $V' \oplus V''$ în loc de $V' + V''$.*

Teorema 3.1.8 *Suma $V' + V''$ este directă dacă şi numai dacă ssv V', V'' sunt independente,*

$$V' \oplus V'' \Leftrightarrow V' \cap V'' = \{0\}.$$

Pentru implicaţia $\Rightarrow$ presupunem prin absurd că $V' \cap V'' \neq \{0\}$, deci $\exists z \in V' \cap V''$, $z \neq 0$. Dacă $x \in V' \oplus V''$, $x = x' + x'' = x' - z + x'' + z$ şi avem două descompuneri, suma nu e directă. Pentru implicaţia $\Leftarrow$ presupunem prin absurd că pentru $x \in V" + V''$ avem două descompuneri $x = x' + x'' = y' + y''$ cu $x', y' \in V'$, $x'', y'' \in V''$; rezultă $x' - y' = y'' - x'' \in V' \cap V'' = \{0\}$ şi deci $x' = x''$ şi $y' - y''$.

Definiţia 3.1.9 *Ssv V', V'' ale sv V se numesc suplimentare dacă $V = V' \oplus V''$.*

Exemplul 3.1.1.9 *Avem $F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = F_p(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \oplus F_i(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, adică cele două ssv sunt suplimentare.*

Exemplul 3.1.1.10 *In V_3 spaţiul vectorilor liberi considerăm ssv: V_D ssv al vectorilor liberi paraleli cu dreapta D, V_P ssv al vectorilor liberi paraleli cu planul P; dacă dreapta D nu este paralelă cu planul P atunci cele două ssv sunt suplimentare.*

Exemplul 3.1.1.11 *In spaţiul vectorilor de poziţie considerăm subspaţiul vectorilor de poziţie ai punctelor de pe o dreaptă care trece prin origine şi subspaţiul vectorilor de poziţie ai punctelor dintr-un plan care trece prin origine; cele două subspaţii sunt suplimentare.*

3.1.2 Dependenţă şi independenţă lineară

Definiţia 3.1.10 *Elementele $x_1, x_2, ..., x_p$ din sv V sunt linear independente dacă singura lor combinaţie lineară nulă este cea cu toţi coeficienţii nuli, adică*

$$\begin{aligned} x_1, x_2, ..., x_p \quad \textit{linear} \quad \textit{independente} \ \Leftrightarrow & \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p &= 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0. \end{aligned}$$

Vom mai spune că mulţimea $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ *este o mulţime linear independentă sau o mulţime liberă.*

Definiţia 3.1.11 *Vectorii* $x_1, x_2, ..., x_p$ *din* V *sunt linear dependenţi dacă nu sunt linear independenţi, adică* $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ *nu toţi nuli astfel încât* $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p = 0$. *Vom mai spune că mulţimea* $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ *este o mulţime linear dependentă sau o mulţime legată.*

Exemplul 3.1.2.1 *In* $\mathbf{R}^3$ *vectorii* $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ *sunt linear independenţi.*

Exemplul 3.1.2.2 *Tot în* $\mathbf{R}^3$ *vectorii* $x_1 = (1, 2, -1), x_2 = (2, -1, 0), x_3 = (4, -7, 2)$ *sunt linear dependenţi pentru că* $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

Sunt imediate următoarele teoreme:

Teorema 3.1.9 *Vectorul nul* 0 *este linear dependent.*

Teorema 3.1.10 *Orice vector nenul este linear independent.*

Teorema 3.1.11 *Vectorii* $x_1, x_2, ..., x_p$ *sunt linear dependenţi dacă cel puţin unul dintre ei se exprimă ca o combinaţie lineară a celorlalţi.*

Teorema 3.1.12 *Orice supramulţime a unei mulţimi linear dependente este tot o mulţime linear dependentă.*

Teorema 3.1.13 *Orice submulţime a unei mulţimi linear independente este tot o mulţime linear independentă.*

Definiţia 3.1.12 *O mulţime infinită de vectori se numeşte linear independentă (liberă) dacă orice submulţime finită a sa este linear independentă.*

Exemplul 3.1.2.3 *In* $P(\mathbf{R})$ *mulţimea polinoamelor* $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ *este o mulţime linear independentă infinită.*

3.1.3 Bază, coordonate, dimensiune

Definiţia 3.1.13 *O mulţime B finită sau infinită de vectori din sv V se numeşte bază a lui V dacă este linear independentă şi este un sistem de generatori ai lui V.*

Exemplul 3.1.3.1 *In $\mathbf{R}^3$ mulţimea formată din vectorii $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ este o bază pentru că aceste elemente sunt linear independente şi constituie un sistem de generatori.*

Exemplul 3.1.3.2 *In $P(\mathbf{R})$ mulţimea polinoamelor $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ este o bază pentru că aceste elemente sunt linear independente şi constituie un sistem de generatori.*

Teorema 3.1.14 *O mulţime finită $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de vectori din V este o bază dacă şi numai dacă orice vector x din V se exprimă în mod unic ca o combinaţie lineară a vectorilor din $B : x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$.*

In adevăr dacă B este bază şi am avea două scrieri diferite

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n, \\ x &= \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n \end{aligned}$$

ar rezulta prin scădere

$$(\xi_1 - \eta_1)e_1 + (\xi_2 - \eta_2)e_2 + ... + (\xi_n - \eta_n)e_n = 0$$

şi B ar fi linear dependentă; am avea o contradicţie. Invers, dacă orice vector se exprimă in mod unic ca o combinaţie lineară a vectorilor din B, atunci B este sistem de generatori şi este şi linear independentă pentru că dacă am avea $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0$ din unicitatea scrierii lui 0 ar rezulta $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Exemplul 3.1.3.3 *In mulţimea $M_{m,n}(\mathbf{R})$ a matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente reale, orice matrice se scrie în mod unic ca o combinaţie a celor mn matrice care au toate elementele nule cu excepţia câte unuia egal cu unitatea. Aceste matrice constituie o bază în $M_{m,n}(\mathbf{R})$.*

Exemplul 3.1.3.4 *In spaţiul SF al şirurilor recurente de ordinul doi de tipul lui Fibonacci considerăm şirurile de tipul lui Fibonacci* $\{f1_n\} = \{1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$ *(primul termen este 1, al doilea este 0),* $\{f2_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$ *(primul termen este 0, al doilea este 1). Cum orice şir de tipul lui Fibonacci* $\{f_n\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots\}$ *se scrie în mod unic sub forma* $\{f_n\} = f_1\{f1_n\} + f_2\{f2_n\}$ *rezultă că şirurile* $\{f1_n\}, \{f2_n\}$ *alcătuiesc o bază a lui SF.*

Definiţia 3.1.14 *Scalarii* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *din exprimarea unică a vectorului* $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ *în baza* B *se numesc coordonatele sau componentele vectorului* x *în (pe) baza* B*.*

Definiţia 3.1.15 *Coloana* $X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ *se numeşte coloana coordonatelor sau coloana componentelor vectorului* x *în (pe) baza* B*.*

Dacă $Y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$ este coloana coordonatelor lui y în (pe) baza B atunci coloanele vectorilor $x + y$, λx sunt $X + Y = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \vdots \\ \xi_n + \eta_n \end{pmatrix}$ respectiv $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \\ \vdots \\ \lambda\xi_n \end{pmatrix}$, adică operaţiilor cu vectori le corespund operaţii cu coloanele coordonatelor vectorilor.

Dacă vom nota tot cu B şi matricea linie formată cu elementele bazei

$$B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

atunci descompunerea vectorului $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ se poate scrie matriceal

$$x = BX = (e_1, e_2, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Dacă luăm p vectori pentru care avem descompunerile pe baza B

$$x_1 = BX_1, x_2 = BX_2, \cdots, x_p = BX_p$$

se poate scrie matriceal

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) = B(X_1, X_2, \ldots, X_p)$$

unde $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ este o matrice ale cărei coloane sunt coloanele coordonatelor vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pe baza B.

Definiţia 3.1.16 *Matricea $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ ale cărei coloane sunt coloanele coordonatelor vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pe baza B se numeşte matricea coordonatelor (componentelor) vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pe (în) baza B.*

Exemplul 3.1.3.5 *Matricea coordonatelor vectorilor bazei B pe ea însăşi este matricea unitate.*

Exemplul 3.1.3.6 *Matricea vectorilor $x_1 = (1, 2, -1), x_2 = (2, -1, 0), x_3 = (4, -7, 2)$ pe baza lui $\mathbf{R}^3$ formată din vectorii $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ este*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Are loc teorema

Teorema 3.1.15 *Vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sunt linear dependenţi dacă şi numai dacă matricea coordonatelor lor pe baza B are rangul p.*

In adevăr, vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sunt linear independenţi dacă din relaţia $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p = 0$ sau scrisă cu ajutorul coloanelor coordonatelor $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p = 0$ rezultă $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$. Dar relaţia matriceală constituie de fapt un sistem omogen de n ecuaţii cu p necunoscute $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ a cărui matrice a coeficienţilor este matricea coordonatelor vectorilor. Acest sistem omogen are numai soluţia banală dacă şi numai dacă rangul acestei matrice coincide cu numărul necunoscutelor.

Exemplul 3.1.3.7 *Vectorii* $x_1 = (1,0,0), x_2 = (1,1,0), x_3 = (1,1,1)$ *din* $\mathbf{R}^3$ *sunt linear independenţi pentru că matricea lor pe baza* $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are evident rangul 3.

Exemplul 3.1.3.8 *Tot în* $\mathbf{R}^3$ *vectorii* $x_1 = (1,2,-1), x_2 = (2,-1,0), x_3 = (4,-7,2)$ *sunt linear dependenţi pentru că matricea lor pe aceeaşi bază de mai sus*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

are rangul doi.

Teorema 3.1.16 *(a înlocuirii simple) Fie* $B = (e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots e_n)$ *o bază a sv* V *şi* $e'_j = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \ldots + \sigma_j e_j + \ldots + \sigma_n e_n$ *un vector. Mulţimea* $B' = (e_1, e_2, \ldots, e'_j, \ldots e_n)$ *obţinută prin înlocuirea vectorului* e_j *cu vectorul* e'_j *este o bază dacă şi numai dacă coordonata* σ_j *este nenulă. Dacă* $\sigma_j \neq 0$ *şi dacă vectorul* x *are pe baza* B *coloana coordonatelor* $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_j \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ *pe baza* B' *va avea coloana coordonatelor* $\begin{pmatrix} \xi_1 - \frac{\sigma_1 \xi_j}{\sigma_j} \\ \xi_2 - \frac{\sigma_2 \xi_j}{\sigma_j} \\ \vdots \\ \frac{\xi_j}{\sigma_j} \\ \vdots \\ \xi_n - \frac{\sigma_n \xi_j}{\sigma_j} \end{pmatrix}$.

In adevăr, B' este bază dacă şi numai dacă este liberă şi generatoare. Considerăm combinaţia lineară nulă a sa $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda e'_j + \ldots + \lambda_n e_n = 0$. Inlocuind pe e'_j obţinem combinaţia lineară nulă a elementelor lui B

$$(\lambda_1 - \lambda\sigma_1)e_1 + (\lambda_2 - \lambda\sigma_2)e_2 + \ldots + \lambda\sigma_j e_j + \ldots (\lambda_n - \lambda\sigma_n)e_n = 0.$$

Cum B este liberă rezultă egalităţile

$$\lambda_1 - \lambda\sigma_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 - \lambda\sigma_2 &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda\sigma_j &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda_n - \lambda\sigma_n &= 0. \end{aligned}$$

Ori dacă $\sigma_j \neq 0$ atunci şi numai atunci rezultă $\lambda = 0$ şi ca atare $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Deci B' este liberă dacă şi numai dacă $\sigma_j \neq 0$. Dacă $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_j e_j + \ldots \xi_n e_n$ când $\sigma_j \neq 0$ putem înlocui pe e_j în funcţie de e'_j

$$e'_j = \frac{1}{\sigma_j}(-\sigma_1 e_1 - \sigma_2 e_2 - \cdots + e'_j - \cdots - \sigma_n e_n)$$

şi obţinem

$$x = (\xi_1 - \frac{\sigma_1\xi_j}{\sigma_j})e_1 + (\xi_2 - \frac{\sigma_2\xi_j}{\sigma_j})e_2 + \cdots + \frac{\xi_j}{\sigma_j}e'_i + \cdots + (\xi_n - \frac{\sigma_n\xi_j}{\sigma_j})e_n,$$

adică B' este generatoare şi avem şi expresiile noilor coordonate.

Vom observa că dacă bazei B îi asociem tabloul coordonatelor

$B\backslash E$	e_1	e_2	$\cdots$	e_j	$\cdots$	e_n	e'_j	x
e_1	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	σ_1	ξ_1
e_2	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	σ_2	ξ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_j	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	σ_j	ξ_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	σ_n	ξ_n

bazei B' va trebui să-i asociem tabloul noilor coordonate

$B\backslash E$	e_1	e_2	$\cdots$	e_j	$\cdots$	e_n	e'_j	x
e_1	1	0	$\cdots$	$-\frac{\sigma_1}{\sigma_j}$		0	0	$\xi_1 - \frac{\sigma_1\xi_j}{\sigma_j}$
e_2	0	1	$\cdots$	$-\frac{\sigma_2}{\sigma_j}$		0	0	$\xi_2 - \frac{\sigma_2\xi_j}{\sigma_j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e'_j	0	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sigma_j}$		0	1	$\frac{\xi_j}{\sigma_j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	0	0	$\cdots$	$-\frac{\sigma_n}{\sigma_j}$		1	0	$\xi_n - \frac{\xi_j\sigma_j}{\sigma_j}$

In trecerea de la primul tablou la al doilea toate calculele iau în considerare coordonata nenulă σ_j; ea se numeşte *coordonată pivot*. Putem enunţa regulile de calcul ale noilor cordonate spunând că totdeauna componenta pivot se înlocuieşte prin 1, celelalte coordonate de pe coloana pivotului devin nule, coordonatele de pe linia pivotului se împart cu pivotul, iar celelalte coordonate se calculează cu regula dreptunghiului format de linia şi coloana pivotului şi linia şi coloana coordonatei de calculat

$$\xi'_k = \xi_k - \frac{\sigma_k \xi_j}{\sigma_j}.$$

Teorema precedentă se generalizează sub forma

Teorema 3.1.17 *(Teorema înlocuirii) Dacă $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ este o bază a sv V şi $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$ este o mulţime de vectori linear independenţi, atunci $p \leq n$ şi se pot renumerota vectorii bazei B astfel încât $B' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ să fie o nouă bază a sv V.*

Vom demonstra teorema din aproape în aproape. In adevăr pentru $p = 1$ avem teorema precedentă. Să presupunem că teorema este adevărată pentru primii $k-1 < p$ vectori din cei p daţi. Atunci $k - 1 \leq n$. Nu putem avea $k - 1 = n$ pentru că atunci vectorii $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_{k-1})$ ar forma o bază şi e'_k s-ar exprima ca o combinaţie lineară a lor şi deci $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_{k-1}, e'_k)$ n-ar fi linear independenţi. Deci avem chiar $k - 1 < n$ sau $k \leq n$. In virtutea ipotezei există baza $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_{k-1}, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ pe care elementul e'_k se descompune în mod unic; cel puţin una din coordonatele sale după vectorii $e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ este nenulă, să zicem că aceasta este cea după e_k, pentru că altfel el s-ar exprima prin $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{k-1}$. Atunci după teorema înlocuirii simple, e'_k se introduce în bază în locul lui e_k şi rezultă că teorema este adevărată şi pentru $k \leq p$.

Rezultă următoarea teoremă

Teorema 3.1.18 *Dacă sv V are o bază formată din n vectori orice altă bază are tot n vectori.*

In adevăr, dacă V are baza B cu n vectori şi baza B' cu n' vectori, în virtutea teoremei precedente avem $n' \leq n$. Schimbând rolul bazelor avem şi $n \leq n'$. Deci $n = n'$.

Are sens deci următoarea definiţie

Definiţia 3.1.17 *Un sv V are dimensiunea n şi scriem $dim(V) = n$ dacă există o bază a sa formată din n vectori. Mai zicem că V este spaţiu vectorial n-dimensional. Prin definiţie $dim(\{0\}) = 0$. Un sv V are dimensiunea infinită şi scriem $dim(V) = \infty$ dacă există o bază infinită. Mai zicem că V este spaţiu vectorial infinit-dimensional.*

Exemplul 3.1.3.9 *Sv $\mathbf{R}^n$ are dimensiunea n, $dim(\mathbf{R}^n) = n$, o bază a sa fiind formată din vectorii $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Aceasta se numeşte baza canonică a lui $\mathbf{R}^n$.*

Exemplul 3.1.3.10 *Sv $P_n(\mathbf{R})$ are dimensiunea $n + 1$, $dim(P_n(\mathbf{R})) = n + 1$, o bază a sa fiind formată din polinoamele $1, x, x^2, \ldots, x^n$, aceasta fiind baza canonică a acestui spaţiu.*

Exemplul 3.1.3.11 *Sv $P(\mathbf{R})$ este infinit-dimensional, o bază a sa fiind $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.*

Prima parte a teoremei înlocuirii se poate enunţa sub una din formele:

Teorema 3.1.19 *Intr-un sv n-dimensional numărul maxim de vectori ai unei mulţimi de vectori linear independenţi este n.*

Teorema 3.1.20 *Intr-un spaţiu n-dimensional orice n+1 vectori sunt linear dependenţi.*

Mai putem enunţa

Teorema 3.1.21 *Intr-un spaţiu vectorial n-dimensional V fie $B' = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) B' este bază a lui V;

b)B' este liberă (formată din vectori linear independenţi);

c) B' este un sistem de generatori.

In adevăr, evident a)⇒b); avem b)⇒c) pentru că dacă x este un vector oarecare mulţimea $B' \cup \{x\}$ are $n + 1$ elemente şi nu poate să fie liberă şi deci x se descompune după elementele lui B'. Acum c)⇒a) pentru că dacă B' n-ar fi şi liberă, fie $m < n$ numărul maxim de vectori linear independenţi din B'. Aceşti m vectori ar fi şi un sistem de generatori, adică am avea o bază cu $m < n$ elemente, contradicţie.

3.1.4 Subspaţii vectoriale în spaţii vectoriale finit dimensionale

Din teorema înlocuirii rezultă următoarele teoreme cu privire la subspaţiile vectoriale ale spaţiului vectorial n-dimensional V.

Teorema 3.1.22 *Orice subspaţiu vectorial V' al spaţiului vectorial n-dimensional V are dimensiunea $n' \leq n$. Dacă $n' = n$ atunci V' coincide cu V.*

Teorema 3.1.23 *(teorema completării) Orice mulţime $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ de vectori linear independenţi din spaţiul vectorial n-dimensional V poate fi completată cu $n-p$ vectori până la o bază a lui V.*

Teorema 3.1.24 *Orice subspaţiu vectorial V' al spaţiului vectorial n-dimensional V admite cel puţin un subspaţiu suplimentar V'' ($V = V' \oplus V''$).*

In adevăr dacă $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ este o bază a lui V', după teorema completării există vectorii $\{g_{p+1}, g_{p+2}, \cdots, g_n\}$ astfel încât $\{f_1, f_2, \cdots, f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \cdots, g_n\}$ este o bază a lui V. Notăm $V'' = [g_{p+1}, g_{p+2}, \cdots, g_n]$ subspaţiul generat de aceşti vectori. Orice vector x din V se scrie în mod unic sub forma $x = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \cdots \xi_p f_p + \eta_{p+1} g_{p+1} + \cdots + \eta_n g_n$ adică $x = x' + x''$ cu $x' \in V'$, $x'' \in V''$. Deci $V = V' \oplus V''$.

Notăm că un subspaţiu vectorial poate avea chiar o infinitate de subspaţii suplimentare. De exemplu subspaţiul vectorilor liberi paraleli cu un plan are ca supliment orice subspaţiu al vectorilor liberi paraleli cu o dreaptă neparalelă cu planul.

Avem consecinţa

Consecinţa 1. Subspaţiul suplimentar al unui subspaţiu p-dimensional este (n-p)-dimensional.

Introducem definiţiile

Definiţia 3.1.18 *Un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 se numeşte dreaptă vectorială, un subspaţiu vectorial cu dimensiunea 2 se numeşte plan vectorial.*

Definiţia 3.1.19 *Un subspaţiu vectorial se numeşte hiperplan vectorial dacă are ca supliment o dreaptă vectorială.*

Rezultă

Consecinţa 2. Un subspaţiu vectorial al unui spaţiu n-dimensional este un hiperplan dacă şi numai dacă are dimensiunea n-1.

Avem

Teorema 3.1.25 *Orice subspaţiu vectorial p-dimensional al unui spaţiu vectorial n-dimensional poate fi considerat ca intersecţie a n-p hiperplane vectoriale.*

In adevăr, dacă $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ este o bază a subspaţiului vectorial p-dimensional V' şi $\{f_1, f_2, \cdots, f_p, g_{p+1}, g_{p+2}, \cdots, g_n\}$ este baza lui V obţinută prin completarea primei baze, putem considera cele n-p hiperplane $V_a = [f_1, f_2, \cdots, f_p, g_{p+1}, \cdots, \widehat{g_{p+a}}, \cdots g_{p+n-p}]$, $a = 1, 2, \cdots, n-p$, căciula indicând că se exclude vectorul respectiv. Se verifică imediat că $V' = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-p}$.

Dacă A este o mulţime finită de elemente notăm prin $card(A)$ numărul elementelor mulţimii A. Este evident că are loc aşa numitul *principiu al includerii şi excluderii*:

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B).$$

O relaţie asemănătoare avem pentru dimensiunile subspaţiilor. Anume, are loc

Teorema 3.1.26 *(Teorema lui Grassman) Dacă V', V'' sunt două subspaţii vectoriale finit dimensionale, are loc relaţia*

$$dim(V' + V'') = dim(V') + dim(V'') - dim(V' \cap V'').$$

In adevăr, fie $n' = dim(V')$, $n'' = dim(V'')$, $i = dim(V' \cap V'')$, $s = dim(V' + V'')$, şi fie $\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ o bază a lui $V' \cap V''$. Completăm aceasta bază până la baza lui V', $\{e_1, e_2, \cdots, e_i, f_{i+1}, \cdots, f_{n'}\}$ respectiv până la baza lui V'', $\{e_1, e_2, \cdots, e_i, g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_{n''}\}$. Să arătăm că $\{e_1, e_2, \cdots, e_i, f_{i+1}, \cdots, f_{n'}, g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_{n''}\}$ este o bază a lui $V' + V''$. Cum orice element din $V' + V''$ este suma între un element din V' şi un element din V'' rezultă că elementele de mai sus constituie un sistem de generatori al lui $V' + V''$. Să luăm o combinaţie lineară nulă a acestora

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_i e_i + \beta_{i+1} f_{i+1} + \cdots + \beta_{n'} f_{n'} + \gamma_{i+1} g_{i+1} + \cdots + \gamma_{n''} g_{n''} = 0.$$

Se poate scrie

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_i e_i + \beta_{i+1} f_{i+1} + \cdots + \beta_{n'} f_{n'} = -\gamma_{i+1} g_{i+1} - \cdots - \gamma_{n''} g_{n''}$$

Membrul stâng este în V', membrul drept este în V'' şi deci membrul stâng egal cu cel drept este din $V' \cap V''$ şi deci $\beta_{i+1} = \cdots = \beta_{n'} = 0$ şi $\gamma_{i+1} = \cdots = \gamma_{n''} = 0$. Rezultă şi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_i = 0$. Deci $\{e_1, e_2, \cdots, e_i, f_{i+1}, \cdots, f_{n'}, g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_{n''}\}$ este o bază a lui $V' + V''$. Numărul lor este $s = i + (n' - i) + (n'' - i) = n' + n'' - i$ c. c. t. d.

Rezultă

Consecinţa 3. Dacă $dim(V' \cap V'') = 0$ atunci şi numai atunci $dim(V' + V'') = dim(V') + dim(V'')$.

Consecinţa 4. Dacă V', V'' sunt ssv ale unui sv n-dimensional şi $dim(V') + dim(V'') > n$ atunci $V' \cap V'' \neq \{0\}$.

3.1.5 Schimbarea coordonatelor la schimbarea bazelor

In sv n-dimensional V considerăm o bază $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ pe care o considerăm veche în raport cu o altă bază $B' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ pe care o considerăm nouă. Matricea elementelor bazei noi pe baza veche este

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Reamintim că prima coloană în matricea S este coloana coordonatelor lui e'_1, a doua coloana este coloana coordonatelor lui e'_2, etc. Putem scrie relaţia matriceală

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

sau pe scurt

$$B' = BS.$$

Vom spune că matricea S este *matricea de trecere* de la baza veche B la baza nouă B'. B' fiind bază, matricea S este inversabilă; fie $T = S^{-1}$ inversa sa. Evident avem

$$B = B'T,$$

adică matricea T este matricea de trecere de la baza nouă la baza veche. Dacă x este un vector oarecare să notăm prin X coloana coordonatelor sale pe vechea bază B şi prin X' coloana coordonatelor sale pe noua bază B'. Vom putea să scriem matriceal

$$\begin{aligned} x &= BX, \\ x &= B'X'. \end{aligned}$$

In a doua relaţie înlocuind expresia lui B' avem

$$x = BSX'$$

şi ţinând cont de unicitatea descompunerii pe o bază rezultă

$$X = SX'.$$

Inmulţind la stânga cu T avem

$$X' = TX.$$

Observăm că în timp ce trecerea de la baza veche la baza nouă se face prin matricea S prin relaţia $B' = BS$, trecerea de la vechile coordonate la noile coordonate se face prin matricea T prin relaţia $X' = TX$; în timp ce trecerea de la baza nouă la baza veche se face prin matricea T prin relaţia $B = TB'$, trecerea dela noile coordonate la vechile coordonate se face prin matricea S prin relaţia $X = SX'$. Este oarecum contrar aşteptărilor noastre, din acest motiv se zice că coordonatele vectorilor se schimbă *contravariant* la schimbarea bazelor.

Situaţia este analoagă măsurării unei lungimi. O lungime măsurată în metri are valoarea l, aceeaşi lungime măsurată în centimetri, $1cm = \frac{1}{100}m$, are valoarea $100l$.

După formula stabilită, calculul componentelor unui vector în noua bază presupune calculul inversei matricei de trecere. Evident, este mult mai simplu să ne folosim de teorema înlocuirii simple introducând succesiv elementele noii baze B' în locul elementelor vechii baze. Este clar că prin acest procedeu putem chiar decide dacă elementele lui B' formează sau nu o bază.

Exemplul 3.1.5.1 *In* $\mathbf{R}^4$ *să arătăm că elementele* $e'_1 = (1,1,1,1)$, $e'_2 = (1,1,-1,-1)$, $e'_3 = (1,-1,1,-1)$, $e'_4 = (1,-1,-1,1)$ *formează o bază şi să găsim coordonatele elementului* $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ *pe această bază.*

Vom alcătui tabloul iniţial marcând elementele bazei canonice, componentele noii baze şi ale elementului x pe baza canonică

$B \backslash E$	e'_1	e'_2	e'_3	e'_4	x
e_1	1	1	1	1	ξ_1
e_2	1	1	-1	-1	ξ_2
e_3	1	-1	1	-1	ξ_3
e_4	1	-1	-1	1	ξ_4

Cum elementul e'_1 are componenta 1 nenulă pe e_1 introducem elementul e'_1 în bază în locul lui e_1 ajungând la tabloul

$B \backslash E$	e'_1	e'_2	e'_3	e'_4	x
e'_1	1	1	1	1	ξ_1
e_2	0	0	-2	-2	$\xi_2 - \xi_1$
e_3	0	-2	0	-2	$\xi_3 - \xi_1$
e_4	0	-2	-2	0	$\xi_4 - \xi_1$

Cum elementul e'_2 are componenta nenulă -2 pe e_3 introducem în bază elementul e'_2 în locul lui e_3 ajungând la tabloul

$B \backslash E$	e'_1	e'_2	e'_3	e'_4	x
e'_1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_3$
e_2	0	0	-2	-2	$\xi_2 - \xi_1$
e'_2	0	1	0	1	$-\frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_1$
e_4	0	0	-2	2	$\xi_4 - \xi_3$

Cum e'_3 are componenta nenulă -2 pe e_2 introducem e'_3 în bază în locul lui e_2. Obţinem tabloul

$B \backslash E$	e'_1	e'_2	e'_3	e'_4	x
e'_1	1	0	0	-1	$\frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3$
e'_3	0	0	1	1	$\frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2$
e'_2	0	1	0	1	$\frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_3$
e_4	0	0	0	4	$\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4$

Deoarece e'_4 are componenta nenulă 4 pe e_4 introducem e'_4 în bază în locul lui e_4 obţinând ultimul tablou

$B\backslash E$	e'_1	e'_2	e'_3	e'_4	x
e'_1	1	0	0	0	$\frac{1}{4}\xi_1 + \frac{1}{4}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 + \frac{1}{4}\xi_4$
e'_3	0	0	1	0	$\frac{1}{4}\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 - \frac{1}{4}\xi_4$.
e'_2	0	1	0	0	$\frac{1}{4}\xi_1 + \frac{1}{4}\xi_2 - \frac{1}{4}\xi_3 - \frac{1}{4}\xi_4$
e'_4	0	0	0	1	$\frac{1}{4}\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_2 - \frac{1}{4}\xi_3 + \frac{1}{4}\xi_4$

Deci elementele e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 constituie o bază pe care elementul x are componentele

$$\begin{aligned}
\xi'_1 &= \frac{1}{4}\xi_1 + \frac{1}{4}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 + \frac{1}{4}\xi_4 \\
\xi'_2 &= \frac{1}{4}\xi_1 + \frac{1}{4}\xi_2 - \frac{1}{4}\xi_3 - \frac{1}{4}\xi_4 \\
\xi'_3 &= \frac{1}{4}\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 - \frac{1}{4}\xi_4 \\
\xi'_4 &= \frac{1}{4}\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_2 - \frac{1}{4}\xi_3 + \frac{1}{4}\xi_4
\end{aligned}$$

Rezultă şi că inversa matricei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

este

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Considerând coloanele unei matrice pătratice de ordinul n drept coloanele coordonatelor unor elemente din $\mathbf{R}^n$ pe baza canonică, atunci prin trecere de la baza canonică la baza formată din aceste elemente, matricea coordonatelor bazei canonice va fi matricea inversă matricei date. Evident, în procesul de calcul putem decide dacă această inversă există sau nu.

Exemplul 3.1.5.2 *Să se calculeze inversa matricei*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerăm această matrice ca matrice a coordonatelor elementelor e'_1, e'_2, e'_3 *din* $\mathbf{R}^3$ *pe baza canonică* e_1, e_2, e_3 *a acestui spaţiu. Avem tabloul iniţial*

$B\backslash E$	e_1	e_2	e_3	e'_1	e'_2	e'_3
e_1	1	0	0	2	2	3
e_2	0	1	0	1	−1	0
e_3	0	0	1	−1	2	1

Introducem elementul e'_1 *în locul lui* e_2

$B\backslash E$	e_1	e_2	e_3	e'_1	e'_2	e'_3
e_1	1	−2	0	0	4	3
e'_1	0	1	0	1	−1	0
e_3	0	1	1	0	1	1

Introducem elementul e'_2 *în locul lui* e_3

$B\backslash E$	e_1	e_2	e_3	e'_1	e'_2	e'_3
e_1	1	−6	−4	0	0	−1
e'_1	0	2	1	1	0	1
e'_2	0	1	1	0	1	1

Introducem e'_3 *în locul lui* e_1

$B\backslash E$	e_1	e_2	e_3	e'_1	e'_2	e'_3
e'_3	−1	6	4	0	0	1
e'_1	1	−4	−3	1	0	0
e'_2	1	−3	−3	0	1	0

Reordonând elementele bazei avem tabloul

$B\backslash E$	e_1	e_2	e_3	e'_1	e'_2	e'_3
e'_1	1	−4	−3	1	0	0
e'_2	1	−3	−3	0	1	0
e'_3	−1	6	4	0	0	1

şi deci matricea inversă căutată este

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observaţie. Referitor la penultimul tablou, vom observa că dacă matricea componentelor elementelor (e'_1, e'_2, e'_3) pe baza (e'_3, e'_1, e'_2) este

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (e'_1, e'_2, e'_3) = (e'_3, e'_1, e'_2)P$$

atunci matricea componentelor elementelor (e'_3, e'_1, e'_2) pe baza (e'_1, e'_2, e'_3) este transpusa P^t a matricei P şi vom avea $PP^t = P^tP = I$, adică inversa matricei P este transpusa sa P^t. Se zice că matricea P este matrice ortogonală. In acest fel din penultimul tablou putem scoate direct inversa lui A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Această observaţie poate fi folosită în programarea procedeului.

Fie sistemul linear de n ecuaţii cu m necunoscute $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1m}\xi_m &= \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2m}\xi_m &= \beta_2, \\ &\ldots.. \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{nm}\xi_m &= \beta_n. \end{aligned}$$

Considerând coloanele coeficienţilor necunoscutelor drept coloanele coordonatelor vectorilor $a_1, a_2, \cdots, a_m$ din $\mathbf{R}^n$ pe baza canonică, iar coloana termenilor liberi coloana coordonatelor unui vector b din $\mathbf{R}^n$ pe aceeaşi bază canonică, sistemul de mai sus devine

$$\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_m a_m = b,$$

adică sistemul este compatibil dacă şi numai dacă subspaţiul generat de $a_1, a_2, \cdots, a_m$ are aceeaşi dimensiune cu subspaţiul generat de $a_1, a_2, \cdots, a_m, b$. Ori asta înseamnă că

sistemul este compatibil dacă şi numai dacă matricea coeficienţilor are acelaşi rang cu matricea extinsă a sistemului (teorema lui Kroniker-Capelli).

Dacă $m = n$ şi elementele $a_1, a_2, \cdots, a_m$ sunt linear independente adică matricea coeficienţilor este nesingulară atunci şi numai atunci sistemul admite soluţie unică oricare ar fi coloana termenilor liberi (teorema lui Cramer).

A rezolva sistemul de mai sus revine la a găsi componentele elementului b pe baza formată cu elemente din $a_1, a_2, \cdots, a_m$. Aceasta se poate face cu procedeul de mai sus. Acest procedeu de rezolvare a sistemelor lineare se numeşte de obicei *algoritmul lui Gauss-Jordan.* Necunoscutele corespunzătoare unor vectori care intră în bază se numesc *necunoscute de bază sau principale*, celelalte numindu-se *necunoscute secundare.*

Exemplul 3.1.5.3 *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{aligned} \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_4 &= -3 \\ 3\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 &= 1 \\ 2\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3 - \xi_4 &= 4 \\ \xi_1 + 3\xi_2 - 2\xi_3 - 2\xi_4 &= 7. \end{aligned}$$

Conform celor de mai sus avem tabloul iniţial

$B \backslash E$	a_1	a_2	a_3	a_4	b
e_1	1	−2	0	1	−3
e_2	3	−1	−2	0	1
e_3	2	1	−2	−1	4
e_4	1	3	−2	−2	7

Introducem în bază a_1 în locul lui e_1

$B \backslash E$	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_1	1	−2	0	1	−3
e_2	0	5	−2	−3	10
e_3	0	5	−2	−3	10
e_4	0	5	−2	−3	10

Introducem în bază a_2 *în locul lui* e_2

$B\backslash E$	a_1	a_2	a_3	a_4	b
a_1	1	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1
a_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	2
e_3	0	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0	0

Rezultă că sistemul este compatibil dublu nedeterminat şi are soluţia generală

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 1 + \frac{4}{5}\xi_3 + \frac{1}{5}\xi_4 \\ \xi_2 &= 2 + \frac{2}{5}\xi_3 + \frac{3}{5}\xi_4\end{aligned}$$

unde ξ_3, ξ_4 *sunt arbitrare.*

3.2 Aplicaţii lineare

Definiţia 3.2.1 *Dacă* V *şi* W *sunt două spaţii vectoriale peste acelaşi corp* K, *se numeşte funcţie lineară definită pe spaţiul vectorial* V *cu valori în spaţiul vectorial* W *o funcţie* $f : V \to W$ *care satisface condiţiile*

- este aditivă, adică $\forall x, y \in V : f(x + y) = f(x) + f(y)$,
- este omogenă, adică $\forall \lambda \in K, \forall x \in V : f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Cu alte cuvinte, o funcţie lineară $f : V \to W$ este un homomorfism al lui V în W faţă de operaţiile din cele două spaţii vectoriale. Ca atare o funcţie lineară se mai numeşte şi *homomorfism de spaţii vectoriale*. Cum în loc de funcţie se mai spune şi aplicaţie, o funcţie lineară se mai numeşte şi *aplicaţie lineară*. Pentru că o funcţie lineară care face ca lui $x \in V$ să-i corespundă $f(x) \in W$ se poate interpreta ca o transformare care tranformă pe $x \in V$ în $f(x) \in W$, o funcţie lineară se mai numeşte şi *transformare lineară*.

Dacă spaţiul vectorial W al valorilor funcţiei lineare coincide cu spaţiul vectorial de definiţie V, funcţia lineară $f : V \to V$ se mai numeşte şi *endomorfism linear* al spaţiului vectorial V sau o*perator linear* definit pe spaţiul vectorial V. Dacă spaţiul vectorial al

valorilor funcţiei lineare coincide cu corpul K, funcţia lineară $f : V \to K$ se mai numeşte şi *formă lineară* pe spaţiul vectorial V.

Este evidentă

Teorema 3.2.1 *Funcţia $f : V \to W$ este lineară dacă şi numai dacă*

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda, \mu \in K : f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Exemplul 3.2.0.4 *Dacă $P_n(K)$ este sv al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi din corpul K aplicaţia*

$$d : P_n(K) \to P_{n-1}(K)$$

cu proprietatea că $\forall p(x) \in P_n(K)$, $d(p(x)) = p'(x)$, $p'(x)$ fiind derivata lui $p(x)$ este o aplicaţie lineară pentru că

$$(\lambda p(x) + \mu q(x))' = \lambda p'(x) + \mu q'(x).$$

Exemplul 3.2.0.5 *Dacă V', V'' sunt două subspaţii vectoriale suplimentare ale spaţiului V orice element $x \in V$ se scrie în mod unic sub forma $x = x' + x''$ cu $x' \in V', x'' \in V''$. Aplicaţia $p : V \to V$ astfel că $p(x) = x'$ este o aplicaţie lineară, sau altfel spus, este un endomorfism al spaţiului vectorial V numit proiecţia elementului x pe V' paralel cu V''.*

Exemplul 3.2.0.6 *Dacă V este un spaţiu vectorial peste corpul K şi $\lambda \in K$, aplicaţia $o\lambda : V \to V$ cu proprietatea că $\forall x \in V$, $o\lambda(x) = \lambda x$ este un endomorfism al lui V sau o transformare lineară a lui V numită omotetie de parametru λ. Pentru $\lambda = -1$ ea se numeşte simetrie faţă de subspaţiul nul.*

Exemplul 3.2.0.7 *Dacă $C[a, b]$ este spaţiul vectorial al funcţiilor reale continue pe $[a, b]$ atunci aplicaţia $l : C[a, b] \to \mathbf{R}$ astfel că $\forall \varphi(x) \in C[a, b]$, $l(\varphi(x)) = \int\limits_a^b \varphi(x)dx$ este o formă lineară pe $C[a, b]$.*

Exemplul 3.2.0.8 *In spaţiul vectorilor de poziţie în raport cu originea O considerăm aplicaţia care face ca vectorului de poziţie $\overrightarrow{x}$ să-i corespundă vectorul de poziţie $s_u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$; aici $\overrightarrow{u}$ este un versor şi $\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u}$ este produsul scalar dintre $\overrightarrow{x}$ şi $\overrightarrow{u}$.*

Este evident că avem o aplicaţie lineară. Gândind că expresia $(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$ *apare într-un dublu produs vectorial*

$$(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{x}$$

putem scrie

$$\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{u}$$

adică putem scrie $\overrightarrow{x}$ *ca sumă între componenta după* $\overrightarrow{u}$ *şi un vector normal pe* $\overrightarrow{u}$*. Atunci*

$$s_u(\overrightarrow{x}) = -(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{u}$$

şi deci $s_u(\overrightarrow{x})$ *are aceeaşi componentă normală pe* $\overrightarrow{u}$ *ca şi* $\overrightarrow{x}$*, dar după* $\overrightarrow{u}$ *are componenta opusă. Putem spune că endomorfismul* s_u *este simetria faţă de planul care trece prin origine şi este normal la versorul* $\overrightarrow{u}$*. Intr-un spaţiu vectorial cu produs scalar vom avea un asemenea endomorfism.*

3.2.1 Proprietăţi ale funcţiilor lineare

Dacă $f : V \to W$ este o aplicaţie lineară avem evident $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$.

Teorema 3.2.2 *Imaginea* $f(V')$ *a unui subspaţiu vectorial* V' *al spaţiului* V *prin aplicaţia lineară* $f : V \to W$ *este un subspaţiu al lui* W*.*

In adevăr,

$$f(V') = \{y | \exists x \in V' \quad a\hat{\imath} \quad f(x) = y\}.$$

Fie $y_1, y_2 \in f(V')$, $\exists x_1, x_2 \in V' \quad a\hat{\imath}\ f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ şi cum $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in V'$ rezultă că $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in f(V')$, cctd.

In particular, dacă $f : V \to W$ este lineară atunci imaginea întregului spaţiu V prin f este un subspaţiu $f(V)$ al lui W. $f(V)$ se numeşte *imaginea lui* f şi se notează cu $Im(f)$.

Teorema 3.2.3 *Aplicaţia lineară* $f : V \to W$ *este surjectivă dacă şi numai dacă* $Im(f) = W$*.*

Teorema 3.2.4 *Preimaginea $f^{-1}(W')$ a unui subspaţiu al lui $f(V)$ prin funcţia lineară $f : V \to W$ este un subspaţiu al lui V.*

Prin definiţie

$$f^{-1}(W') = \{x | x \in V \quad csi \quad \exists y \in f(V) \quad a\hat{i} \quad f(x) = y\}$$

Demonstraţia se face ca mai sus.

In particular dacă $W' = \{0\}$, preimaginea $f^{-1}(0) = \{x | x \in V \quad \wedge \quad f(x) = 0\}$ este un subspaţiu al lui V care se numeşte *nucleul funcţiei lineare* f şi se notează cu $Ker(f)$ (dela kernel-nucleu, sâmbure, eng).

Teorema 3.2.5 *Aplicaţia lineară $f : V \to W$ este injectivă dacă şi numai dacă*

$Ker(f) = \{0\}$.

Teorema 3.2.6 *Aplicaţia lineară $f : V \to W$ este bijectivă dacă şi numai dacă $Im(f) = W$ şi $Ker(f) = \{0\}$.*

Teorema 3.2.7 *Dacă aplicaţia lineară $f : V \to W$ este bijectivă atunci inversa sa $f^{-1} : W \to V$ există şi este tot lineară.*

Definiţia 3.2.2 *O aplicaţie lineară bijectivă $f : V \to W$ se numeşte izomorfism între spaţiul V şi W. Dacă între două spaţii vectoriale există un izomorfism spaţiile se numesc izomorfe.*

Definiţia 3.2.3 *Dacă $f : V \to W$, $g : V \to W$ sunt două aplicaţii lineare, se numeşte suma lor aplicaţia $f + g : V \to W$ astfel că $\forall x \in V$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*

Teorema 3.2.8 *Suma a două aplicaţii lineare este tot o aplicaţie lineară.*

Definiţia 3.2.4 *Dacă $f : V \to W$ este o aplicaţie lineară şi $\lambda \in K$, produsul între λ şi f este aplicaţia $\lambda f : V \to W$ astfel că $\forall x \in V$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.*

Teorema 3.2.9 *Produsul dintre λ şi aplicaţia lineară $f : V \to W$ este tot o aplicaţie lineară.*

Teorema 3.2.10 *Mulţimea aplicaţiilor lineare de la spaţiul V în spaţiul W înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţirea cu un scalar este un spaţiu vectorial peste acelaşi corp şi se notează cu $Hom(V, W)$.*

Definiţia 3.2.5 *Dacă U, V, W sunt spaţii vectoriale peste corpul K şi $g : V \to W$ şi $f : W \to U$ sunt aplicaţii lineare, se numeşte produs al lor $f \circ g$ aplicaţia $f \circ g : V \to U$ astfel încât $\forall x \in V$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.*

Teorema 3.2.11 *Produsul $f \circ g$ a două aplicaţii lineare este tot o aplicaţie lineară.*

Teorema 3.2.12 *Produsul aplicaţiilor lineare este distributiv faţă de adunarea lor.*

Teorema 3.2.13 *Mulţimea endomorfismelor spaţiului vectorial V înzestrată cu operaţiile de adunare şi produs este un inel cu unitate (endomorfismul identic).*

3.2.2 Aplicaţii lineare pe spaţii vectoriale finit dimensionale

Definiţia 3.2.6 *Dacă V şi W sunt spaţii vectoriale peste corpul K de dimensiuni finite şi $f : V \to W$ este o aplicaţie lineară, dimensiunea subspaţiului imagine se numeşte rangul aplicaţiei şi se notează $rang(f) = dim(Im(f))$. Dimensiunea nucleului aplicaţiei f se numeşte defectul aplicaţiei f şi se notează $def(f) = dim(Ker(f))$.*

Teorema 3.2.14 *Are loc relaţia $def(f) + rang(f) = dim(V)$.*

In adevăr, fie $r = rang(f)$, $d = def(f)$ şi $n = dim(V)$. Considerăm o bază a lui V astfel încât $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ să fie o bază a lui $Ker(f)$ şi $\{e_{d+1}, \cdots, e_n\}$ să fie o bază a spaţiului suplimentar lui $Ker(f)$. Vectorii $\{f(e_1), \cdots, f(e_d), f(e_{d+1}), \cdots f(e_n)\}$ generează pe $Im(f)$ şi cum $f(e_1) = \cdots = f(e_d) = 0$, rezultă că $Im(f)$ este generat de vectorii $\{f(e_{d+1}), \cdots f(e_n)\}$. Aceştia sunt şi linear independenţi pentru că dacă avem combinaţia lor lineară nulă

$$\lambda_{d+1} f(e_{d+1}) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0$$

rezultă că $\lambda_{d+1} e_{d+1} + \cdots + \lambda_n e_n \in Ker(f)$ şi cum acesta n-are în comun cu suplimentul său decât elemenul nul rezultă $\lambda_{d+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. Relaţia este demonstrată.

Avem consecinţele

Consecinţa 1. Dacă aplicaţia lineară $f : V \to W$ este o bijecţie atunci $dim(V) = dim(W)$.

Consecinţa 2. Dacă aplicaţia lineară $f : V \to W$ este o injecţie atunci pentru orice subspaţiu $V' \subset V$ avem $dim(V') = dim(f(V'))$.

Consecinţa 3. Dacă $dim(V) = dim(W)$ pentru ca aplicaţia lineară $f : V \to W$ să fie bijecţie este suficient să fie sau injecţie sau surjecţie.

Fie aplicaţia lineară $f : V \to W$ şi fie $B_V = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ o bază a lui V. Pentru orice element $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$ din V avem

$$f(x) = \xi_1 f(e_1) + \xi_2 f(e_2) + \cdots + \xi_n f(e_n).$$

Deci are loc

Teorema 3.2.15 *Aplicaţia lineară $f : V \to W$ este cunoscută dacă şi numai dacă se cunosc valorile ei pe elementele unei baze.*

Fie acum $B_W = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ o bază a spaţiului valorilor W. Elementele $f(e_1)$, $f(e_2)$, $\cdots$, $f(e_n)$ se descompun după această bază

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \cdots + \alpha_{m1} f_m \\ f(e_2) &= \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \cdots \alpha_{m2} f_m \\ &\cdots \\ f(e_n) &= \alpha_{1n} f_1 + \alpha_{2n} f_2 + \cdots + \alpha_{mn} f_m. \end{aligned}$$

Prin α_{ij} am notat coordonata lui $f(e_j)$ după f_i. Coordonatele lui $f(e_1)$ alcătuiesc coloana 1 a unei matrice, coordonatele lui $f(e_2)$ alcătuiesc coloana 2 a acelei matrice, etc. Şi elementul $y = f(x)$ se descompune după această bază

$$y = f(x) = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \cdots \eta_m f_m.$$

Inlocuind expresiile lui $f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)$ în relaţia

$$y = f(x) = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \cdots \eta_m f_m = \xi_1 f(e_1) + \xi_2 f(e_2) + \cdots + \xi_n f(e_n)$$

şi identificând coordonatele după baza $B_W = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ avem

$$\eta_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n \\ &\dots \\ \eta_m &= \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n \end{aligned}$$

Matricea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

se numeşte *matricea asociată aplicaţiei lineare f în perechea de baze B_V, B_W.*

Fie

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

coloana coordonatelor elemenului $x \in V$ pe baza B_V, $x = B_V X$ şi

$$Y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$$

coloana componentelor elementului $y = f(x) \in W$ pe baza B_W, $y = B_W Y$. Relaţiile de mai sus se pot scrie matricial sub forma

$$Y = AX.$$

Invers, dacă considerăm o aplicaţie definită pe V cu valori în W care elementului $x = B_V X$ face să-i corespundă elementul $y = B_W Y$ astfel încât $Y = AX$, această aplicaţie este lineară. Deci am demonstrat

Teorema 3.2.16 *Dacă $f : V \to W$ este o aplicaţie lineară, atunci într-o pereche de baze B_V, B_W îi corespunde o matrice A de tipul $dim(W) \times dim(V)$ astfel încât dacă X este coloana coordonatelor lui $x \in V$ pe baza B_V, Y este coloana coordonatelor lui $y = f(x)$ pe baza B_W atunci $Y = AX$ şi reciproc o asemenea aplicaţie este lineară.*

Unui endomorfism $f : V \to V$ într-o bază B_V îi corespunde o matrice pătratică de ordinul $dim(V)$. Unei forme lineare $l : V \to K$ îi va corespunde într-o bază B_V o linie cu $dim(V)$ elemente.

Operaţiilor cu aplicaţii lineare le corespund evident operaţii cu matricele asociate.

Din teorema precedentă rezultă

Teorema 3.2.17 *Spaţiul vectorial $Hom(V, W)$ al aplicaţiilor lineare pe spaţiul vectorial n-dimensional V în spaţiul vectorial m-dimensional W are dimensiunea nm.*

Exemplul 3.2.2.1 *In spaţiul vectorilor de poziţie dintr-un plan raportat la o bază ortonormată dreaptă $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ considerăm endomorfismul $R\theta$ astfel că $R\theta(\overrightarrow{x})$ este rotitul lui $\overrightarrow{x}$ cu unghiul θ în jurul originii O. Cum*

$$\begin{aligned} R\theta(\overrightarrow{i}) &= \cos\theta\overrightarrow{i} + \sin\theta\overrightarrow{j} \\ R\theta(\overrightarrow{j}) &= -\sin\theta\overrightarrow{i} + \cos\theta\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

rezultă că matricea endomorfismului pe această bază este

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exemplul 3.2.2.2 *Dacă acum vom nota cu $R\theta$ endomorfismul spaţiului vectorilor de poziţie astfel încât $R\theta(\overrightarrow{x})$ este rotitul lui $\overrightarrow{x}$ cu unghiul θ în jurul axei Oz, atunci este clar că vom putea scrie matricea endomorfismului pe baza ortonormată $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 3.2.2.3 *Fie P_{xy} endomorfismul spaţiului vectorilor de poziţie care constă in proiectarea ortogonală a vectorului $\overrightarrow{x}$ pe planul xOy. Matricea sa pe baza ortonormată $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ este evident*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 3.2.2.4 *In acelaşi spaţiu al vectorilor de poziţie considerăm endomorfismul* S_{xy} *pentru care* $S_{xy}(\overrightarrow{x})$ *este simetricul lui* $\overrightarrow{x}$ *faţă de planul* xOy. *Matricea sa pe aceeaşi bază ortonormată este*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 3.2.2.5 *In spaţiul vectorilor de poziţie considerăm endomorfismul* s_u *pentru care* $s_u(\overrightarrow{x})$ *este simetricul lui* $\overrightarrow{x}$ *faţă de planul care trece prin origine şi e normal la versorul* $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k}$, $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$. *Dacă* $\overrightarrow{x} = \xi \overrightarrow{i} + \eta \overrightarrow{j} + \zeta \overrightarrow{k}$ *atunci*

$$\begin{aligned} s_u(\overrightarrow{x}) &= \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} = \\ &= \xi \overrightarrow{i} + \eta \overrightarrow{j} + \zeta \overrightarrow{k} - 2(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)(\alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k}) \end{aligned}$$

şi deci matricea lui s_u *pe baza* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *este*

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\beta\alpha & 1-2\beta^2 & -2\beta\gamma \\ -2\gamma\alpha & -2\gamma\beta & 1-2\gamma^2 \end{pmatrix}. = I - 2UU^t$$

unde I *este matricea unitate de ordinul trei şi* U *este matricea coloană a componentelor versorului* $\overrightarrow{u}$.

Exemplul 3.2.2.6 *In spaţiul vectorilor de poziţie considerăm aplicaţia, evident lineară,* $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{x}$, *unde* $\overrightarrow{\omega} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k}$ *este un vector dat. Dacă* $\overrightarrow{x} = \xi \overrightarrow{i} + \eta \overrightarrow{j} + \zeta \overrightarrow{k}$ *rezultă*

$$f(\overrightarrow{x}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(\beta\zeta - \gamma\eta) + \overrightarrow{j}(\gamma\xi - \alpha\zeta) + \overrightarrow{k}(\alpha\eta - \beta\xi)$$

şi deci matricea asociată este

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

adică o matrice antisimetrică $\Omega^t = -\Omega$. *Se verifică imediat că reciproc, un endomorfism pe spaţiul vectorilor de poziţie care într-o bază ortonormată dreaptă* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *are o matrice antisimetrică este un produs vectorial.*

Exemplul 3.2.2.7 *Am văzut că prin rotirea vectorului* $\overrightarrow{x}$ *în jurul axei de versor* $\overrightarrow{u}$ *cu unghiul* α *se obţine vectorul*

$$R(\overrightarrow{u},\varphi;\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{x})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{x})\times\overrightarrow{u}\cos\varphi + \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{x}\sin\varphi.$$

scris prin explicitarea dublului produs vectorial

$$R(\overrightarrow{u},\varphi;\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{x})\overrightarrow{u} + [\overrightarrow{x} - (\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{x})\overrightarrow{u}]\cos\varphi + \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{x}\sin\varphi.$$

Aceasta este evident o aplicaţie lineară a cărei matrice este

$$A(U,\alpha) = UU^t + (I - UU^t)\cos\varphi + \Omega\sin\varphi$$

unde U *este coloana coordonatelor versorului* $\overrightarrow{u}$ *şi*

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Se verifică uşor că $A(U,-\varphi) = A(U,\varphi)^t$ *şi că* $A(U,\varphi)A(U,\varphi)^t = I$, *adică matricea asociată este ortogonală.*

Exemplul 3.2.2.8 *In spaţiul* $P_n(\mathbf{R})$ *al polinoamelor de grad cel mult* n *cu coeficienţi reali, considerăm endomorfismul* D *pentru care* $D(p(X)) = p'(X)$. *Pe baza*

$$(1, X, X^2, \cdots, X^n)$$

acest endomorfism are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2! & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & n! \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Schimbarea matricei unui endomorfism la schimbarea bazei

Fie V spaţiu vectorial peste corpul K, $dim(V) = n$ şi $f : V \to V$ un endomorfism al său. Intr-o bază B_V endomorfismului îi corespunde o matrice asociată A astfel încât dacă $x = B_V X$ şi $y = f(x) = B_V Y$ atunci $Y = AX$. Trecem de la baza veche B_V la baza nouă B'_V prin matricea de trecere $S : B'_V = B_V S$. Trecerea de la baza B'_V la baza B_V se face cu matricea $T = S^{-1} : B_V = B'_V T$. In noua bază endomorfismului îi corespunde matricea asociată A' astfel că dacă $x = B'_V X'$ şi $y = f(x) = B'_V Y'$ atunci $Y' = A'X'$. Ţinând cont că $X = SX'$, $Y = SY'$ relaţia $Y = AX$ devine $SY' = ASX'$, de unde $Y' = TASX'$. Concludem că

$$A' = TAS.$$

Teorema 3.2.18 *Dacă în bază B_V endomorfismului f îi corespunde matricea A şi se trece la baza $B'_V = B_V S$ în noua bază endomorfismului îi corespunde matricea $A' = TAS$, $T = S^{-1}$.*

Se spune că matricea unui endomorfism se schimbă odată covariant şi odată contravariant la schimbarea bazelor.

Definiţia 3.2.7 *Două matrice A, A' se numesc asemenea dacă $A' = TAS$ unde S este o matrice nesingulară şi $T = S^{-1}$.*

Cu această definiţie putem spune că unui endomorfism îi corespund matrice asemenea în baze diferite.

3.2.4 Diagonalizarea matricei asociate unui endomorfism.

Deoarece o matrice diagonală are o formă simplă se pune problema dacă există o bază $(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ a spaţiului vectorial V peste corpul K astfel încât endomorfismul $f : V \to V$ să aibă asociată în această bază o matrice diagonală

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dacă ar exista o asemenea bază am avea

$$\begin{aligned} f(e_1') &= \lambda_1 e_1' \\ f(e_2') &= \lambda_2 e_2' \\ &\dots \\ f(e_n') &= \lambda_n e_n'. \end{aligned}$$

Suntem conduşi la următoarea

Definiţia 3.2.8 *Un vector nenul $x \in V$ se numeşte vector propriu al endomorfismului $f : V \to V$ corespunzător valorii proprii $\lambda \in K$ dacă are loc relaţia $f(x) = \lambda x$.*

Exemplul 3.2.4.1 *In spaţiul vectorilor de poziţie considerăm endomorfismul s_u pentru care $s_u(\overrightarrow{x})$ este simetricul lui $\overrightarrow{x}$ faţă de planul care trece prin origine şi e normal la versorul $\overrightarrow{u}$*

$$s_u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}.$$

Avem $s_u(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}$ şi dacă $\overrightarrow{v}$ este ortogonal pe $\overrightarrow{u}$ atunci avem $s_u(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. Deci $\overrightarrow{u}$ este vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = -1$, iar $\overrightarrow{v}$ este vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$.

După definiţia de mai sus, matricea unui endomorfism are formă diagonală dacă şi numai dacă există o bază formată din vectori proprii. Atunci pe diagonală apar valorile proprii.

Evident noţiunea de vector propriu este strâns legată de noţiunea de subspaţiu invariant:

Definiţia 3.2.9 *Un subspaţiu V' al spaţiului vectorial V se numeşte subspaţiu invariant faţă de endomorfismul $f : V \to V$ dacă oricare ar fi $x \in V' \Rightarrow f(x) \in V'$.*

Dacă considerăm rotaţia vectorilor de poziţie cu un unghi θ în jurul axei Oz atunci subspaţiul vectorilor de poziţie ai punctelor de pe axa Oz este un subspaţiu invariant; la fel, subspaţiul vectorilor de poziţie ai punctelor din planul xOy este un subspaţiu invariant.

Este evident că dacă subspaţiul V' este invariant faţă de endomorfismul bijectiv f atunci el este invariant şi faţă de endomorfismul invers f^{-1}.

Fie $B_V = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ o bază oarecare a spaţiului vectorial V şi fie

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea asociată endomorfismului pe această bază. Dacă $x = B_V X$ şi $x \neq 0$ este un vector propriu corespunzător unei valori proprii $\lambda \in K$ trebuie să avem

$$AX = \lambda X$$

sau

$$(A - \lambda I)X = 0$$

sau dezvoltat

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} - \lambda)\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n &= 0 \\ \alpha_{21}\xi_1 + (\alpha_{22} - \lambda)\xi_2 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n &= 0 \\ &\cdots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \cdots + (\alpha_{nn} - \lambda)\xi_n &= 0 \end{aligned}$$

Acesta este un sistem linear omogen de n ecuaţii cu n necunoscute. Cum el trebuie să aibă o soluţie nebanală este necesar ca determinantul coeficienţilor necunoscutelor să fie nul. Acest determinant este un polinom de gradul n în λ

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Definiţia 3.2.10 *Polinomul $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se numeşte polinomul caracteristic al matricei A.*

Definiţia 3.2.11 *Numim minor diagonal al unei matrice A un minor care are pe diagonala sa principală numai elemente de pe diagonala principală a matricei A.*

Observăm că se poate scrie

$$P(\lambda) = (-1)^n[\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n\delta_n]$$

unde δ_i este suma minorilor diagonali de ordinul i :

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn} \\
\delta_2 &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,n-1} & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \\
&\cdots \\
\delta_n &= \det(A)
\end{aligned}$$

Definiţia 3.2.12 *Numărul $\delta_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}$ se numeşte urma matricei A şi se notează $Tr(A)$ (de la trace-urma, eng.,fr.) sau $Sp(A)$ (de la spur-urma, germ.).*

Teorema 3.2.19 *Două matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic.*

In adevăr, dacă A' este asemenea cu A atunci $A' = TAS$ şi polinomul său caracteristic este

$$\begin{aligned}
P'(\lambda) &= \det(A' - \lambda I) = \det(TAS - \lambda TIS) = \\
&= \det[T(A - \lambda I)S] = \det(A - \lambda I) = P(\lambda)
\end{aligned}$$

Deci are sens

Definiţia 3.2.13 *Polinomul caracteristic al matricei asociate endomorfismului într-o bază se numeşte polinomul caracteristic al endomorfismului.*

Coeficienţii polinomului caracteristic sunt invarianţi ai endomorfismului (nu se schimbă la schimbarea bazei).

Cu aceasta putem enunţa

Teorema 3.2.20 *Numărul λ este valoare proprie a unui endomorfism numai dacă este rădăcină a polinomului caracteristic al endomorfismului.*

Observăm că dacă $K = \mathbf{R}$, o rădăcină complexă a polinomului caracteristic nu este valoare proprie a endomorfismului.

Definiţia 3.2.14 *Mulţimea rădăcinilor polinomului caracteristic al unei matrice, fiecare rădăcină considerată de atâtea ori cât este multiplicitatea ei, constituie spectrul matricei.*

Teorema 3.2.21 *Vectorii proprii corespunzători unei valori proprii a unui endomorfism împreună cu vectorul nul alcătuiesc un subspaţiu vectorial a cărui dimensiune este cel mult multiplicitatea valorii proprii ca rădăcină a polinomului caracteristic.*

Dacă λ_0 este o valoare proprie a endomorfismului f, vectorii proprii corespunzători lui λ_0 împreună cu vectorul nul alcătuiesc nucleul lui $f - \lambda_0 i$, unde i este aplicaţia identică, deci formează un subspaţiu. Dacă acest subspaţiu are o bază $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$, completăm aceasta până la o bază $(e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n)$. Pe această bază endomorfismul are matricea

$$\begin{pmatrix}
\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\
0 & \lambda_0 & & 0 & \alpha_{2,k+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\
0 & 0 & \cdots & \vdots & & & \\
0 & 0 & & \lambda_0 & \alpha_{k,k+1} & \cdots & \alpha_{k,n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn}
\end{pmatrix}$$

şi deci polinomul caracteristic este $P(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k Q(\lambda)$. Dacă m_0 este multiplicitatea lui λ_0 ca rădăcină a polinomului caracteristic rezultă $k \leq m_0$.

Definiţia 3.2.15 *Subspaţiul vectorilor proprii corespunzători unei valori proprii se numeşte subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii.*

Definiţia 3.2.16 *Multiplicitatea unei valori proprii ca rădăcină a polinomului caracteristic al unui endomorfism se numeşte multiplicitatea algebrică a valorii proprii, iar dimensiunea subspaţiului propriu corespunzător valorii proprii se numeşte multiplicitatea geometrică a valorii proprii.*

Cu această definiţie, putem enunţa altfel teorema precedentă:

Teorema 3.2.22 *Multiplicitatea geometrică a unei valori proprii este cel mult egală cu multiplicitatea sa algebrică.*

Consecinţa 1. Unei valori proprii, rădăcină simplă a polinomului caracteristic, îi corespunde un subspaţiu propriu unidimensional.

Teorema 3.2.23 *Vectorii proprii corespunzători unor valori proprii diferite sunt linear independenţi.*

Demonstrăm prin inducţie completă. Evident un singur vector propriu este linear independent fiind nenul. Presupunem proprietatea adevărată pentru $k-1$ vectori proprii corespunzători unor valori proprii diferite. Fie k vectori proprii $x_1, x_2, \cdots, x_k$ corespunzători valorilor proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$. Fie o combinaţie lineară nulă a lor

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0.$$

Aplicând endomorfismul putem scrie

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k x_k = 0.$$

Inmulţim relaţia precedentă cu λ_k şi o scădem din ultima

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)x_2 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0.$$

In virtutea ipotezei $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ sunt linear independenţi şi rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_{k-1} = 0$. In plus şi $\alpha_k = 0$, c. c. t. d.

Consecinţa 2. Dacă endomorfismul $f : V \to V$ are $dim(V)$ valori proprii distincte există o bază în care matricea endomorfismului are forma diagonală.

Pentru cazul general avem

Teorema 3.2.24 *Pentru endomorfismul $f : V \to V$ există o bază în care matricea endomorfismului are forma diagonală dacă şi numai dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt valori proprii şi multiplicitatea geometrică a fiecărei valori proprii coincide cu multiplicitatea sa algebrică.*

Condiţia este necesară. In adevăr, dacă există o bază $(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ în care matricea endomorfismului are forma diagonală cu primele m_1 elemente de pe diagonală egale cu λ_1, următoarele m_2 egale cu λ_2, ş.a.m.d., ultimele m_k egale cu λ_k, atunci polinomul caracteristic este

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{m_k},$$

adică toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt din corpul K şi au multiplicităţile $m_1, m_2, \cdots, m_k$. Avem

$$f(e'_1) = \lambda_1 e'_1, f(e'_2) = \lambda_1 e'_2, \cdots, f(e'_{m_1}) = \lambda_1 e'_{m_1}$$

adică subspaţiul propriu V'_1 corespunzător lui λ_1 conţine vectorii $e'_{1,} e'_2, \cdots, e'_{m_1}$ şi deci are dimensiunea $dim(V'_1) \geq m_1$. Cum $dim(V'_1) \leq m_1$ rezultă $dim(V'_1) = m_1$,etc.

Condiţia este suficientă. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ toate rădăcinile polinomului caracteristic cu multiplicităţile $m_1, m_2, \cdots, m_k$ valori proprii. Avem $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = dim(V) = n$. Subspaţiile proprii $V'_1, V'_2, \cdots, V'_k$ corespunzătoare valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ au dimensiunile $m_1, m_2, \cdots, m_k$. Alegem vectorii proprii $e'_1, e'_2, \cdots, e'_n$ astfel încât primii m_1 vectori proprii să alcătuiască o bază a lui V'_1, următorii m_2 vectori proprii să alcătuiască o bază a lui V'_2, etc. Să arătăm că aceşti n vectori sunt linear independenţi. Dacă am avea o combinaţie lineară a lor nulă

$$\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \cdots + \alpha_n e'_n = 0,$$

notând cu x_1 suma primilor m_1 termeni, cu x_2 suma următorilor m_2 termeni, etc vom avea

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 0,$$

adică avem o combinaţie lineară nulă de vectori proprii corespunzători unor valori proprii distincte. Deci $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ şi de aici $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, adică cei n vectori $e'_1, e'_2, \cdots, e'_n$ linear independenţi formează o bază. Pe această bază endomorfismul are o matrice diagonală cu primele m_1 elemente de pe diagonală egale cu λ_1, următoarele m_2 egale cu λ_2, ş.a.m.d., ultimele m_k egale cu λ_k.

Exemplul 3.2.4.2 *Fie V un spaţiu vectorial real bidimensional cu baza $B = (e_1, e_2)$. Un endomorfism al lui V are în această bază matricea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este evident $P(\lambda) = (1 - \lambda)^2$ şi deci avem valoarea proprie $\lambda = 1$ cu multiplicitatea algebrică 2. Sistemul care dă vectorii proprii corespunzători

$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ este

$$\begin{aligned} \xi_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = 1$ sunt $x = \xi_1 e_1$, deci multiplicitatea geometrică este 1 şi ca atare nu există o bază în care endomorfismul are o matrice diagonală.

Exemplul 3.2.4.3 *In spaţiul vectorial real V bidimensional considerăm endomorfismul care pe baza (e_1, e_2) are matricea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = 6$ şi $\lambda_2 = -1$. Vectorii proprii corespunzători lui $\lambda_1 = 6$ sunt daţi de sistemul

$$\begin{aligned} -5\xi_1 + 2\xi_2 &= 0 \\ 5\xi_1 - 2\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Se vede că subspaţiul propriu este unidimensional şi se poate lua $e_1' = 2e_1 - 5e_2$. Vectorii proprii corespunzători lui $\lambda_2 = -1$ sunt daţi de sistemul

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 2\xi_2 &= 0 \\ 5\xi_1 + 5\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

adică formează tot un spaţiu unidimensional şi se poate lua $e_2' = e_1 - e_2$. In baza (e_1', e_2') matricea endomorfismului este

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matricea de trecere de la baza (e_1, e_2) la baza (e_1', e_2') este

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cum

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{7}e_1' + \frac{5}{7}e_2' \\ e_2 &= \frac{1}{7}e_1' - \frac{2}{7}e_2' \end{aligned}$$

matricea inversă este

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Se verifică imediat relaţia $A' = TAS$.

In acest exemplu vom observa că

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 25 & 26 \end{pmatrix}.$$

"Inlocuind" în $p(\lambda)$ în loc de λ matricea A avem

$$p(A) = A^2 - 5A - 6I = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 25 & 26 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vedem că matricea A este "rădăcină" a polinomului său caracteristic. Acest lucru are loc în cazul general:

Teorema 3.2.25 *(teorema lui Cayley-Hamilton) Orice matrice pătratică este "rădăcină" a polinomului său caracteristic.*

Polinomul caracteristic este $p(\lambda) = (-1)^n q(\lambda)$ unde

$$q(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n.$$

Notăm cu B matricea asociată lui $\lambda I - A$, adică matricea complemenţilor algebrici ai transpusei lui $\lambda I - A$. Deci vom avea

$$(\lambda I - A)B = q(\lambda)I.$$

Dar B se poate ordona după puterile crescătoare ale lui λ

$$B = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \cdots + \lambda^{n-1} B_{n-1}.$$

Inlocuind

$$(\lambda I - A)(B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \cdots + \lambda^{n-1} B_{n-1}) =$$

$$= (\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n) I$$

şi identificând coeficienţii puterilor lui λ în ordine descrescătoare avem

$$\begin{aligned}
B_{n-1} &= I \\
B_{n-2} - AB_{n-1} &= \alpha_1 I \\
B_{n-3} - AB_{n-2} &= \alpha_2 I \\
&\cdots \\
B_1 - AB_2 &= \alpha_{n-2} I \\
B_0 - AB_1 &= \alpha_{n-1} I \\
-AB_0 &= \alpha_n I.
\end{aligned}$$

Inmulţind aceste egalităţi la stânga cu $A^n, A^{n-1}, \cdots A, I$ şi adunându-le obţinem $q(A) = 0$.

Exemplul 3.2.4.4 *In spaţiul vectorial real V cu $dim(V) = 3$ în baza $B = (e_1, e_2, e_3)$ se consideră endomorfismul f care face ca lui $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$ să-i corespundă $y = f(x) = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3$ unde*

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \xi_3 \\
\eta_2 &= \xi_2 \\
\eta_3 &= \xi_1
\end{aligned}$$

Matricea lui f pe baza dată este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$. *Deci valorile proprii sunt* $-1, 1$ *cu multiplicităţile algebrice 1 respectiv 2. Vectorii proprii corespunzători valorii proprii* $\lambda = -1$ *sunt daţi de ecuaţia*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0,$$

de unde

$$\frac{\xi_1}{-2} = \frac{\xi_2}{0} = \frac{\xi_3}{2} = \frac{t}{-2}$$

adică vectorii proprii sunt de forma $x = t(e_1 - e_3), t \in \mathbf{R}$. *Ei formează aşa cum ştiam din teorie un subspaţiu unidimensional.*

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = 1$ sunt daţi de ecuaţia

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0$$

care se reduce la singura ecuaţie scalară

$$\xi_1 - \xi_3 = 0.$$

Vectorii proprii sunt $x = \xi_3(e_1 + e_3) + \xi_2 e_2, \xi_2, \xi_3 \in \mathbf{R}$. Ei formează un subspaţiu de dimensiune 2. Rezultă că există o bază formată din vectori proprii în care endomorfismul are matricea diagonală

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vectorii noii baze sunt

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 - e_3 \\ e'_2 &= e_1 + e_3 \\ e'_3 &= e_2 \end{aligned}$$

Vechea bază în funcţie de noua bază este

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2}e'_1 + \frac{1}{2}e'_2 \\ e_2 &= e'_3 \\ e_3 &= -\frac{1}{2}e'_1 + \frac{1}{2}e'_2 \end{aligned}$$

Matricile de trecere sunt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

respectiv

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se verifică relaţia $A' = TAS$.

In noua bază endomorfismul se scrie

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= -\xi'_1 \\ \eta'_2 &= \xi'_2 \\ \eta'_3 &= \xi'_3 \end{aligned}$$

de unde se vede că endomorfismul este o simetrie faţă de planul vectorilor e'_2, e'_3.

Vom demonstra acum

Teorema 3.2.26 *Orice endomorfism al unui spaţiu vectorial real are cel puţin un subspaţiu invariant unidimensional sau bidimensional.*

Dacă polinomul caracteristic, polinom cu coeficienţi reali, are o rădăcină reală atunci endomorfismul are un vector propriu şi deci un subspaţiu unidimensional invariant. Dacă polinomul caracteristic are o rădăcină complexă $\lambda = \alpha + i\beta$ atunci sistemul linear omogen

$$(A - (\alpha + i\beta)I)X = 0$$

are o soluţie nebanală X în general complexă care se poate scrie $X = U + iV$ unde U, V sunt coloane reale. Vom avea deci

$$A(U + iV) = (\alpha + i\beta)((U + iV).$$

Separând părţile reale şi imaginare avem

$$\begin{aligned} AU &= \alpha U - \beta V \\ AV &= \beta U + \alpha V. \end{aligned}$$

Dacă notăm cu u, v vectorii ale căror coloane sunt U, V avem

$$\begin{aligned} f(u) &= \alpha u - \beta v \\ f(v) &= \beta u + \alpha v. \end{aligned}$$

De aici rezultă că subspaţiul generat de u, v este invariant faţă de f. In adevăr pentru orice $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$ avem

$$f(\gamma u + \delta v) = \gamma(\alpha u - \beta v) + \delta(\beta u + \alpha v) = (\gamma\alpha + \delta\beta)u + (-\gamma\beta + \delta\alpha)v.$$

Rămâne de arătat că vectorii u, v sunt linear independenţi. Presupunem contrariul şi că $v \neq 0$. Atunci $u = \gamma v$, deci $U = \gamma V$ şi $U + iV = (\gamma + i)V$. Sistemul fiind omogen trebuie ca şi V să fie soluţie $AV = \alpha V + i\beta V$. Deci $\beta V = 0$ adică $\beta = 0$ contradicţie cu ipoteza că $\alpha + i\beta$ este rădăcină complexă. Dacă $v = 0$ atunci $u \neq 0$ şi $AU = \alpha U + i\beta U$ şi iar se obţine contradicţie.

3.3 Forme lineare, forme bilineare, forme pătratice

3.3.1 Forme lineare

Reamintim că o formă lineară pe spaţiul vectorial V peste corpul K este o aplicaţie lineară $l : V \to K$, deci care face ca fiecărui $x \in V$ să-i corespundă numărul $l(x) \in K$ astfel că $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in V$, $l(\lambda x + \mu y) = \lambda l(x) + \mu l(y)$.

Definiţia 3.3.1 *Mulţimea formelor lineare pe spaţiul vectorial V peste corpul K înzestrată cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire cu numere constituie un spaţiu vectorial peste acelaşi corp K şi se numeşte spaţiul dual sau conjugat al lui V. El se notează cu V^*.*

Teorema 3.3.1 *Spaţiul dual V^* al unui spaţiu vectorial V finit dimensional are aceeaşi dimensiune ca şi V.*

In adevăr dacă în spaţiul V în baza $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ introducem cele n forme lineare care iau valori egale cu coordonatele vectorului, adică

$$\begin{aligned} l_1(x) &= l_1(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_1, \\ l_2(x) &= l_2(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_2, \\ & \cdots \\ l_n(x) &= l_n(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_n. \end{aligned}$$

Aceste forme sunt evident linear independente şi o formă oarecare pe V se scrie

$$l(x) = l_1(x)l(e_1) + l_2(x)l(e_2) + \cdots + l_n(x)l(e_n),$$

adică cele n forme constituie o bază B^* în V^* şi elementele liniei asociate unei forme pe baza B sunt coordonatele formei lineare pe baza B^*.

Definiţia 3.3.2 *Baza B^* se numeşte baza duală a lui B.*

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K, $dim(V) = n$ şi o bază $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ a lui V. Dacă $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n = BX$ şi $l : V \to K$ este o formă lineară, atunci $l(x) = \xi_1 l(e_1) + \xi_2 l(e_2) + \cdots + \xi_n l(e_n)$. Rezultă

Teorema 3.3.2 *O formă lineară pe un spaţiu finit dimensional este cunoscută dacă şi numai dacă se cunosc valorile sale pe elementele unei baze.*

Fie $\lambda_1 = l(e_1)$, $\lambda_2 = l(e_2), \cdots, \lambda_n = l(e_n)$ şi $L = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. Atunci expresia formei lineare este

$$l(x) = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \cdots + \lambda_n \xi_n = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = LX.$$

Rezultă

Teorema 3.3.3 *Unei forme lineare l pe un spaţiu vectorial finit dimensional pe o bază dată îi corespunde o linie L astfel că dacă X este coloana coordonatelor lui x pe acea bază, atunci $l(x) = LX$; reciproc o asemenea funcţie este o formă lineară.*

Observaţie. Dacă corpul K este corpul complex $\mathbf{C}$ atunci se poate defini o *formă lineară de speţa a doua* pe spaţiul vectorial complex V ca fiind o aplicaţie $l : V \to \mathbf{C}$ astfel încât $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{C}, \forall x, y \in V$, avem $l(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} l(x) + \overline{\mu} l(y)$. In acest caz formele lineare definite mai sus se numesc *forme lineare de speţa întâia.* Teorema 3.3.3 devine în cazul formelor lineare de speţa doua

Teorema 3.3.4 *Unei forme lineare de speţa a doua l pe un spaţiu vectorial complex finit dimensional pe o bază dată îi corespunde o linie L cu elemente din $\mathbf{C}$ astfel că dacă X este coloana coordonatelor lui x pe acea bază atunci $l(x) = L\overline{X}$ şi reciproc, o asemenea funcţie este o formă lineară de speţa a doua. $\overline{X}$ este coloana conjugatelor coordonatelor lui x.*

Să presupunem că trecem de la baza veche B la baza nouă B' cu ajutorul matricei de trecere S, $B' = BS$. Atunci în noua bază lui x îi corespunde coloana coordonatelor X' astfel că $X = SX'$. Avem $l(x) = LSX'$. Deci în baza nouă formei lineare îi corespunde linia $L' = LS$, relaţie asemănătoare relaţiei $B' = BS$.

Teorema 3.3.5 *Dacă în spaţiul V se trece de la baza B la baza B' cu matricea de trecere S, $B' = BS$, atunci de la linia L a formei l se trece la linia $L' = LS$.*

Se zice că linia formei lineare se schimbă *covariant* la schimbarea bazelor.

Teorema 3.3.6 *O submulţime V' a unui spaţiu vectorial V este un hiperplan dacă şi numai dacă ea este nucleul unei forme lineare pe V diferită de forma nulă.*

Dacă V' este un hiperplan, atunci există ca supliment o dreaptă vectorială V''. Oricare ar fi $x \in V$ avem $x = x' + x''$ cu $x' \in V'$ şi $x'' \in V''$. Fie $e \in V''$ un vector nenul şi forma lineară l'' pe V'' astfel încât $l''(e) = 1$. Definim forma $l : V \to K$ astfel încât $\forall x \in V$, $l(x) = l''(x'')$. Avem

$$l(x) = 0 \Leftrightarrow x'' = 0 \Leftrightarrow x \in V',$$

adică V' este nucleul formei l.

Fie acum $l : V \to K$ o formă lineară nenulă şi fie V' nucleul său. l fiind nenulă există $e \in V$ astfel că $l(e) = 1$. Fie V'' dreapta vectorială generată de e. Avem $V' \cap V'' = \{0\}$.

Dacă $x \in V$ şi $l(x) = \lambda$ notăm $x'' = \lambda e \in V''$ şi $x' = x - x''$. Avem $l(x') = l(x) - l(\lambda e) = \lambda - \lambda = 0$, deci $x' \in V'$. Rezultă $V = V' \oplus V''$, adică V' este hiperplan.

Rezultă

Teorema 3.3.7 *Un hiperplan vectorial într-un spaţiu n-dimensional este mulţimea vectorilor ale căror coordonate într-o bază verifică o ecuaţie de forma*

$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \cdots + \lambda_n \xi_n = 0$$

cu cel puţin un λ_i *nenul.*

Teorema 3.3.8 *Două forme lineare pe V diferite de forma nulă au acelaşi nucleu dacă şi numai dacă sunt proporţionale (linear dependente).*

In adevăr, dacă formele lineare l_1, l_2 au acelaşi nucleu V', fie V'' suplimentul lui V' şi un vector $e \neq 0$ din V''. Orice vector $x \in V$ se scrie $x = x' + \nu e$. Avem $l_1(x) = \nu l_1(e)$, $l_2(x) = \nu l_2(e)$. Punând $\alpha = \frac{l_2(e)}{l_1(e)}$ rezultă $l_2(x) = \alpha l_1(x)$, adică $l_2 = \alpha l_1$. Reciproc dacă cele două forme sunt proporţionale, ele au acelaşi nucleu.

Consecinţa 1. Ecuaţiile

$$\begin{aligned} \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \cdots + \lambda_n \xi_n &= 0 \\ \mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2 + \cdots + \mu_n \xi_n &= 0 \end{aligned}$$

reprezintă acelaşi hiperplan vectorial dacă şi numai dacă (cu convenţia fracţiilor cu numitor nul)

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \cdots = \frac{\lambda_n}{\mu_n}.$$

Teoremele de mai sus se generalizează în mod evident

Teorema 3.3.9 *Dacă* V' *este un ssv de dimensiune p în sv V de dimensiune n atunci există n-p forme lineare* $l_1, l_2, \cdots l_{n-p}$ *astfel că*

$$x \in V' \Leftrightarrow l_1(x) = l_2(x) = \cdots = l_{n-p}(x) = 0$$

şi orice formă care se anulează pe V' *este combinaţie lineară a celor n-p forme.*

Teorema 3.3.10 *Dacă* $l, l_1, l_2, \cdots, l_q$ *sunt forme lineare pe sv* V *astfel că din* q *relaţii* $l_1(x) = 0,\ l_2(x) = 0,\ \cdots,\ l_q(x) = 0$ *rezultă* $l(x) = 0$ *atunci* l *este combinaţie lineară a formelor* $l_1, l_2, \cdots, l_q,$ *adică există* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ *astfel că* $l = \lambda_1 l_1 + \lambda_1 l_2 + \cdots + \lambda_q l_q.$

Această teoremă are multe aplicaţii în analiză, calcul variaţional şi mecanică unde numerele $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ se numesc de obicei *multiplicatorii lui Lagrange* .

3.3.2 Forme bilineare

Definiţia 3.3.3 *Se numeşte formă bilineară pe spaţiul vectorial* V *peste corpul* K *o aplicaţie* $b : V \times V \to K$ *lineară în raport cu fiecare din argumentele ei, adică*

- este lineară în raport cu primul argument:

$\forall x_1, x_2, y \in V : b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y),$
$\forall \lambda \in K, \forall x, y \in V : b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y);$

- este lineară în raport cu al doilea argument:

$\forall x, y_1, y_2 \in V : b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2),$
$\forall \mu \in K, \forall x, y \in V : b(x, \mu y) = \mu b(x, y).$

Dacă spaţiul vectorial V este n-dimensional şi $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ este o bază a sa, considerând vectorii

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$$

valoarea formei bilineare este

$$b(x, y) = b(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j b(e_i, e_j)$$

Deci are loc

Teorema 3.3.11 *O formă bilineară* b *pe spaţiul n-dimensional* V *este cunoscută dacă şi numai dacă se cunosc valorile sale pe perechile de vectori ai unei baze* $b(e_i, e_j),\ i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, n.$

Notând $\alpha_{ij} = b(e_i, e_j)$ avem matricea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Introducând şi coloanele coordonatelor elementelor x, y valoarea formei bilineare este

$$b(x,y) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = X^t AY.$$

Avem teorema

Teorema 3.3.12 *Unei forme bilineare pe un spaţiu n-dimensional într-o bază a spaţiului îi corespunde o matrice pătratică A de ordinul n astfel că dacă X, Y sunt coloanele coordonatelor elementelor x, y pe bază, valoarea formei bilineare este $b(x,y) = X^t AY$. Reciproc, orice aplicaţie $b : V \times V \to K$ dată printr-o asemenea expresie este o formă bilineară.*

Rezultă imediat

Teorema 3.3.13 *Dacă în spaţiul V se trece de la baza B la baza B' cu matricea de trecere S, $B' = BS$, dacă în baza B formei bilineare îi corespunde matricea A, în baza B' îi corespunde matricea $A' = S^t AS$.*

Se zice că matricea unei forme bilineare se schimbă *dublu covariant* la schimbarea bazelor.

Definiţia 3.3.4 *O formă bilineară $b : V \times V \to K$ se numeşte simetrică dacă $\forall x, y \in V : b(x,y) = b(y,x)$.*

Teorema 3.3.14 *Unei forme bilineare simetrice pe un spaţiu vectorial n-dimensional îi corespunde în orice bază o matrice simetrică.*

Observaţie. In cazul spaţiilor vectoriale V complexe, $K = \mathbf{C}$, se definesc *formele bilineare hermitice,* sau pe scurt hermitice, ca fiind aplicaţiile $b : V \times V \to \mathbf{C}$ lineare de speţa întâia în primul argument şi lineare de speţa a doua în al doilea argument, adică au loc relaţiile

$\forall x_1, x_2, y \in V : b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y),$

$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \forall x, y \in V : b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y);$

$\forall x, y_1, y_2 \in V : b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2),$

$\forall \mu \in \mathbf{C}, \forall x, y \in V : b(x, \mu y) = \overline{\mu} b(x, y).$

Teorema **??** devine

Teorema 3.3.15 *Unei forme bilineare hermitice pe un spaţiu n-dimensional complex într-o bază a spaţiului îi corespunde o matrice pătratică A de ordinul n astfel că dacă X, Y sunt coloanele coordonatelor elementelor x, y pe bază valoarea formei bilineare este $b(x, y) = X^t A \overline{Y}$. Reciproc, orice aplicaţie $b : V \times V \to K$ dată printr-o asemenea expresie este o formă bilineară hermitică.*

Teorema 3.3.13 devine

Teorema 3.3.16 *Dacă în spaţiul complex V se trece de la baza B la baza B' cu matricea de trecere S, $B' = BS$, dacă în baza B formei bilineare îi corespunde matricea A, în baza B' îi corespunde matricea $A' = \overline{S}^t AS$.*

Definiţia 3.3.4 devine

Definiţia 3.3.5 *O formă bilineară hermitică $b : V \times V \to K$ se numeşte simetrică dacă $\forall x, y \in V : b(x, y) = \overline{b(y, x)}$.*

Teorema 3.3.14 devine

Teorema 3.3.17 *Unei forme bilineare hermitice simetrice pe un spaţiu vectorial complex n-dimensional îi corespunde în orice bază o matrice hermitic-simetrică, adică o matrice A astfel încât $\overline{A}^t = A$.*

3.3.3 Forme pătratice

Definiţia 3.3.6 *Se numeşte formă pătratică pe spaţiul vectorial V peste corpul K o aplicaţie $p : V \to K$ cu proprietatea că există o formă bilineară simetrică b pe V astfel încât $\forall x \in V : p(x) = b(x, x)$. Forma bilineară b se numeşte forma polară sau forma bilineară asociată formei pătratice.*

Dacă corpul K are caracteristica diferită de 2, adică $1+1 \neq 0$, atunci se vede imediat că

$$\forall x, y \in V : b(x, y) = \frac{1}{2}[p(x+y) - p(x) - p(y)]$$

şi deci corespondenţa între formele pătratice şi formele bilineare simetrice pe V este biunivocă.

Definiţia 3.3.7 *Matricea formei pătratice pe un spaţiu n-dimensional într-o bază dată este matricea formei polare pe acea bază.*

Dacă A este matricea formei pătratice, valoarea formei pătratice este $p(x) = X^t AX$. Matricea formei pătratice se schimbă ca şi matricea formei polare $A' = S^t AS$.

Practic, expresia formei polare se obţine din expresia formei pătratice prin aşa zisa *dedublare*:

- termenul de forma $\alpha_{ii}(\xi_i)^2$ se scrie ca $\alpha_{ii}\xi_i\xi_i$ care prin dedublare devine $\alpha_{ii}\xi_i\eta_i$;
- termenul de forma $\alpha_{ij}\xi_i\xi_j$ se scrie$\frac{1}{2}\alpha_{ij}(\xi_i\xi_j + \xi_i\xi_j)$ care prin dedublare devine $\frac{1}{2}\alpha_{ij}(\xi_i\eta_j + \eta_i\xi_j)$.

Teorema 3.3.18 *Dacă $p : V \to K$ este o formă pătratică pe spaţiul n-dimensional V peste corpul K de caracteristică diferită de doi atunci există cel puţin o bază în care matricea formei pătratice să fie diagonală.*

De obicei dacă o formă pătratică are matricea diagonală se zice că ea este sub *formă redusă* sau sub *formă canonică.*

Vom demonstra teorema prin inducţie matematică în raport cu $n = dim(V)$. Pentru $n = 1$ teorema este evidentă. Presupunem teorema adevărată pentru spaţii vectoriale

cu dimensiunea $n-1$ şi vom arăta că ea este adevărată şi pentru spaţiul cu dimensiunea n. Să presupunem că în baza $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ forma pătratică are expresia

$$p(x) = \alpha_{11}(\xi_1)^2 + \alpha_{22}(\xi_2)^2 + \cdots + \alpha_{nn}(\xi_n)^2 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots 2\alpha_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n.$$

Dacă nu există nici o coordonată care să intre prin pătratul său, trebuie să existe cel puţin un coeficient α_{ij}, $i \neq j$ nenul. Atunci ţinând cont că

$$\xi_i\xi_j = \left(\frac{\xi_i + \xi_j}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_i - \xi_j}{2}\right)^2$$

facem schimbarea de coordonate

$$\begin{aligned}
\xi'_1 &= \xi_1 \\
\xi'_2 &= \xi_2 \\
&\cdots \\
\xi'_i &= \frac{\xi_i + \xi_j}{2} \\
&\cdots \\
\xi'_j &= \frac{\xi_i - \xi_j}{2} \\
&\cdots \\
\xi'_n &= \xi_n,
\end{aligned}$$

aceasta fiind o veritabilă schimbare de coordonate pentru că este inversabilă

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi'_1 \\
&\cdots \\
\xi_i &= \xi'_i + \xi'_j \\
&\cdots \\
\xi_j &= \xi'_i - \xi'_j \\
&\cdots \\
\xi_n &= \xi'_n,
\end{aligned}$$

altfel spus, se trece de la baza B la baza $B' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$, unde

$$e'_1 = e_1$$

$$\begin{aligned} e'_2 &= e_2 \\ &\cdots \\ e'_i &= e_i + e_j \\ &\cdots \\ e'j &= e_i - e_j \\ &\cdots \\ e'_n &= e_n \end{aligned}$$

In această nouă bază sigur $\alpha'_{ii} \neq 0$. După o asemenea schimbare de coordonate şi deci de bază putem presupune, după o eventuală renumerotare, că $\alpha_{11} \neq 0$. In această situaţie în toţi termenii expresiei formei pătratice care conţin coordonata ξ_1 dăm factor eventual forţat pe $\frac{1}{a_{11}}$. Forma pătratică se scrie

$$p(x) = \frac{1}{\alpha_{11}}\left[\alpha_{11}^2\xi_1^2 + 2\alpha_{11}\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots + 2\alpha_{11}\alpha_{1n}\xi_1\xi_n\right] + termeni \quad fără \quad \xi_1$$

Din termenii din paranteză formăm un pătrat perfect

$$p(x) = \frac{1}{\alpha_{11}}\left[\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n\right]^2 + termeni \quad fără \quad \xi_1.$$

Dacă facem schimbarea de coordonate

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n \\ \xi'_2 &= \xi_2 \\ &\cdots \\ \xi'_n &= \xi_n \end{aligned}$$

forma pătratică se scrie

$$p(x) = \alpha'_{11}(\xi'_1)^2 + formă \quad pătratică \quad pe \quad V_{n-1}.$$

Aici V_{n-1} este spaţiul vectorial generat de vectorii $e'_2, \cdots, e'_n$. In baza ipotezei de inducţie există o bază $e''_1, e''_2, \cdots, e''_n$ în care forma pătratică se scrie sub forma

$$p(x) = \alpha''_{11}(\xi''_1)^2 + \alpha''_{22}(\xi''_2)^2 + \cdots + \alpha''_{nn}(\xi''_n)^2.$$

Vom observa că demonstraţia furnizează o metodă de reducere a unei forme pătratice la forma canonică, metodă numită *metoda lui Gauss*.

Exemplul 3.3.3.1 *Să se reducă la formă canonică forma pătratică definită pe un spaţiu vectorial tridimensional şi care într-o bază $B = (e_1, e_2, e_3)$ are expresia*

$$p(x) = \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 + 4\xi_1\xi_3 + 4\xi_3^2.$$

Matricea formei pătratice pe această bază este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pentru că există pătratul coordonatei ξ_1, din termenii care conţin pe ξ_1 formăm un pătrat perfect:

$$p(x) = (\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3)^2 - \xi_2^2 - 4\xi_3^2 + 4\xi_2\xi_3 + \xi_2^2 + 4\xi_3^2$$

sau notând $\xi_1' = \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3$ scriem

$$p(x) = \xi_1'^2 + 4\xi_2\xi_3.$$

Ne mai existând pătratul unei coordonate vom scrie

$$p(x) = \xi_1'^2 + (\xi_2 + \xi_3)^2 - (\xi_2 - \xi_3)^2$$

sau notând

$$\begin{aligned} \xi_2' &= \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_3' &= \xi_2 - \xi_3 \end{aligned}$$

vom scrie

$$p(x) = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 - \xi_3'^2.$$

Matricea formei pătratice în noua bază pe care trebuie s-o determinăm este

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cum avem relaţia $X' = TX$ rezultă că matricea de trecere de la baza nouă $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la baza veche este

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cum putem explicita vechile coordonate în funcţie de noile coordonate

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi'_1 - \frac{1}{2}\xi'_2 + \frac{3}{2}\xi'_3 \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}\xi'_2 + \frac{1}{2}\xi'_3 \\ \xi_3 &= \frac{1}{2}\xi'_2 - \frac{1}{2}\xi'_3 \end{aligned}$$

şi $X = SX'$, matricea de trecere de la vechea bază la noua bază este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Elementele noii baze sunt

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 \\ e'_3 &= \frac{3}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3. \end{aligned}$$

Se verifică imediat relaţiile $A' = S^t A S$ şi $A = T^t A' T$.

Exemplul 3.3.3.2 *Să se reducă la forma canonică forma pătratică definită pe un spaţiu tridimensional şi care într-o bază dată $B = (e_1, e_2, e_3)$ are expresia*

$$p(x) = \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1.$$

Matricea formei pătratice în baza dată este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne-existând nici-o coordonată la pătrat vom scrie

$$p(x) = \left(\frac{\xi_1}{2} + \frac{\xi_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_1}{2} - \frac{\xi_2}{2}\right)^2 + \xi_3(\xi_1 + \xi_2).$$

Notând

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \frac{\xi_1}{2} + \frac{\xi_2}{2} \\ \xi_2' &= \frac{\xi_1}{2} - \frac{\xi_2}{2} \end{aligned}$$

putem scrie

$$p(x) = \xi_1'^2 - \xi_2'^2 + 2\xi_1'\xi_3,$$

acum existând pătratul coordonatei ξ_1'. Din termenii care conţin ξ_1' formăm un pătrat perfect

$$p(x) = (\xi_1' + \xi_3)^2 - \xi_3^2 - \xi_2'^2.$$

Notând

$$\begin{aligned} \xi_1'' &= \xi_1' + \xi_3 = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \xi_3 \\ \xi_2'' &= \xi_2' = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 \\ \xi_3'' &= \xi_3 \end{aligned}$$

expresia formei pătratice devine

$$p(x) = \xi_1''^2 - \xi_2''^2 - \xi_3''^2.$$

Matricea formei pătratice este

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matricea T de trecere de la baza nouă la baza veche este

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cum avem

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1'' + \xi_2'' - \xi_3'' \\ \xi_2 &= \xi_1'' - \xi_2'' - \xi_3'' \\ \xi_3 &= \xi_3'' \end{aligned}$$

putem scrie

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi deci noua bază este

$$\begin{aligned} e_1'' &= e_1 + e_2 \\ e_2'' &= e_1 - e_2 \\ e_3'' &= -e_1 - e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Observaţie. In cazul spaţiilor vectoriale V complexe se definesc formele pătratice hermitice $p : V \to \mathbf{R}$ pentru care există o formă bilineară hermitică simetrică $b(x, y)$ astfel că $p(x) = b(x, x)$. Notăm că dacă $b(x, y)$ este formă pătratică hermitică atunci $b(x, x) = \overline{b(x, x)}$ şi deci $b(x, x) \in \mathbf{R}$. Şi în acest caz există o corespondenţă biunivocă între formele bilineare hermitice simetrice şi formele pătratice hermitice.

Teorema 3.3.18 devine

Teorema 3.3.19 *Dacă $p : V \to \mathbf{R}$ este o formă pătratică hermitică pe spaţiul n-dimensional V peste corpul C atunci există cel puţin o bază în care matricea formei pătratice să fie diagonală, pe diagonală fiind numere reale.*

3.3.4 Forme pătratice pe spaţii vectoriale reale sau complexe

Este evident că o formă pătratică poate fi redusă la forma canonică în diferite feluri. Din acest motiv denumirea de formă canonică este oarecum improprie, dar odată ce am definit ce înseamnă, totul este clar.

In spaţii vectoriale reale avem

Teorema 3.3.20 *(teorema de inerţie a lui Sylvester) Oricum am reduce la forma canonică o formă pătratică pe un spaţiu vectorial real, numerele coeficienţilor strict pozitivi, coeficienţilor strict negativi şi coeficienţilor nuli sunt aceleaşi.*

Fie $p : V \to \mathbf{R}$ o formă pătratică pe spaţiul vectorial real n-dimensional. Să presupunem că avem două baze $B' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ şi $B'' = (e''_1, e''_2, \cdots, e''_n)$ în care forma pătratică are expresiile

$$\begin{aligned} p(x) &= \lambda'_1\xi_1'^2 + \lambda'_2\xi_2'^2 + \cdots + \lambda'_{p'}\xi_{p'}'^2 - \lambda'_{p'+1}\xi^2_{p'+1} - \cdots - \lambda'_{p'+n'}\xi^2_{p'+n'}, \\ p(x) &= \lambda''_1\xi_1''^2 + \lambda''_2\xi_2''^2 + \cdots + \lambda''_{p''}\xi_{p''}''^2 - \lambda''_{p''+1}\xi_{p''+1}'^2 - \cdots - \lambda''_{p''+n''}\xi_{p''+n''}'^2. \end{aligned}$$

Să presupunem că $p' > p''$. Să notăm cu V' subspaţiul generat de vectorii $e'_1, e'_2, \cdots, e'_{p'}$ şi cu V'' subspaţiul generat de vectorii $e''_{p''+1}, e''_{p''+2}, \cdots, e''_n$. Avem

$$dim(V') = p', \quad dim(V'') = n - p''.$$

Cum

$$dim(V') + dim(V'') = p' + (n - p'') = n + (p' - p'') > n$$

rezultă că $dim(V' \cap V'') > 0$, adică $V' \cap V'' \neq \{0\}$. Există deci un vector nenul $x \in V' \cap V''$. Cum $x \in V'$ rezultă $p(x) > 0$, cum $x \in V''$ rezultă $p(x) \leq 0$. Am ajuns la o contradicţie şi deci $p' = p''$. La fel se demonstrează că $n' = n''$, cctd.

In cazul spaţiilor vectoriale complexe are loc teorema

Teorema 3.3.21 *(teorema de inerţie a lui Sylvester pentru forme pătratice hermitice) Oricum am reduce la forma canonică o formă pătratică hermitică pe un spaţiu vectorial complex, numerele coeficienţilor strict pozitivi, coeficienţilor strict negativi şi coeficienţilor nuli sunt aceleaşi.*

Definiţia 3.3.8 *O formă pătratică $p : V \to \mathbf{R}$ se numeşte pozitiv (negativ) definită dacă valoarea ei este strict pozitivă (negativă) pentru orice vector nenul, anulându-se numai pentru vectorul nul: $\forall x \in V : p(x) \geq 0$ şi $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*

Definiţia rămâne valabilă şi pentru forme pătratice hermitice.

Este evidentă

Teorema 3.3.22 *O formă pătratică, respectiv hermitică, definită pe un spaţiu vectorial real, respectiv complex, finit dimensional este pozitiv (negativ) definită dacă şi numai dacă după reducere la forma canonică toţi coeficienţii sunt strict pozitivi (negativi).*

Mai puţin evidentă dar importantă pentru aplicaţii este

Teorema 3.3.23 *(criteriul lui Sylvester) O formă pătratică (hermitică) definită pe spaţiul vectorial real (complex) V n-dimensional şi care într-o bază are matricea*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

este pozitiv definită dacă şi numai dacă toţi determinanţii diagonali formaţi din colţul stânga sus sunt strict pozitivi

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \alpha_{11} > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} > 0 \\ & \cdots \\ \Delta_n &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Forma pătratică este negativ definită dacă şi numai dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \cdots, (-1)^n \Delta_n > 0$.

Demonstrăm teorema prin inducţie completă în raport cu dimensiunea spaţiului $n = dim(V)$. Pentru $n = 1$ teorema este evidentă. Presupunem teorema adevărată pentru $n - 1$ şi arătăm că este adevărată şi pentru n.

Fie forma pătratică p pozitiv definită în care grupăm în $p'(x')$ termenii care nu conţin coordonata ξ_n şi separat termenii care conţin coordonata ξ_n

$$\begin{aligned} p(x) &= p'(x') + 2\alpha_{1n}\xi_1\xi_n + 2\alpha_{2n}\xi_2\xi_n + \cdots + 2\alpha_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n + \alpha_{nn}\xi_n^2 \\ x' &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_{n-1}e_{n-1}. \end{aligned}$$

$p'(x')$ este o formă pătratică pe un spaţiu n-1-dimensional. Ea este pozitiv definită pentru că dacă ar exista un $x'_0 = \xi_{1,0}e_1 + \xi_{2,0}e_2 + \cdots + \xi_{n-1,0}e_{n-1} \neq 0$ pentru care $p'(x'_0) \leq 0$ atunci şi $p(x'_0) \leq 0$, contradicţie cu ipoteza că p este pozitiv definită. $p'(x')$ fiind pozitiv definită în baza ipotezei de inducţie rezultă că $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \cdots, \Delta_{n-1} > 0$. $p(x)$ se reduce la forma canonică $p(x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \cdots + \lambda_n\xi_n^2$ cu toţi coeficienţii strict pozitivi, deci cu matricea $diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. Avem

$$\Delta_n = \det(A) = \det(S^t diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)S) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n(\det(S))^2 > 0,$$

deci condiţia teoremei este necesară şi pentru n.

Fie acum forma pătratică $p(x)$ pentru care $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \cdots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n > 0$. Trebuie să arătăm că din ipoteza de inducţie rezultă că $p(x)$ este pozitiv definită. $p(x)$ poate fi desfăcută ca mai sus. In virtutea ipotezei de inducţie forma $p'(x')$ este pozitiv definită deci există o bază $(e'_1, e'_2, \cdots, e'_{n-1})$ a subspaţiului generat de $e_1, e_2, \cdots, e_n$ în care $p'(x')$ se scrie sub forma

$$p'(x') = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \cdots + \xi_{n-1}'^2.$$

Adăugăm vectorul e'_n astfel încât $(e'_1, e'_2, \cdots, e'_{n-1}, e'_n)$ să fie o bază a întregului spaţiu. In această bază forma pătratică iniţială se va scrie

$$p(x) = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \cdots + \xi_{n-1}'^2 + 2\alpha'_{1n}\xi'_1\xi'_n + 2\alpha'_{2n}\xi'_2\xi'_n + \cdots + 2\alpha'_{n-1,n}\xi'_{n-1}\xi'_n + \alpha'_{nn}\xi_n'^2$$

sau

$$p(x) = (\xi'_1 + \alpha'_{1n}\xi'_n)^2 + (\xi'_2 + \alpha'_{2n}\xi'_n)^2 + \cdots + (\xi'_{n-1} + \alpha_{n-1,n}\xi'_n)^2 + \beta\xi_n'^2.$$

Punând

$$\begin{aligned} \xi''_1 &= \xi'_1 + \alpha'_{1n}\xi'_n \\ \xi''_2 &= \xi'_2 + \alpha'_{2n}\xi'_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ \xi''_{n-1} &= \xi'_{n-1} + \alpha_{n-1,n}\xi'_n \\ \xi''_n &= \xi'_n \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă o schimbare de bază, forma se scrie

$$p(x) = \xi_1''^2 + \xi_2''^2 + \dots + \xi_{n-1}''^2 + \beta\xi_n''^2.$$

Ca mai sus, după formula de schimbare a matricelor formei pătratice avem

$$\beta = |det(S)|^2\Delta_n.$$

Rezultă că şi $\beta > 0$ adică forma pătratică este pozitiv definită.

Exemplul 3.3.4.1 *Fie forma pătratică definită pe un spaţiu vectorial real tridimensional dată într-o bază prin expresia*

$$p(x) = 2\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 + 4\xi_1\xi_3 - 6\xi_2\xi_3 + 11\xi_3^2.$$

Matricea sa în baza dată este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Cum

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 11 \end{vmatrix} = 1 > 0 \end{aligned}$$

rezultă că forma pătratică este pozitiv definită. De altfel se poate scrie

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(\xi_1^2 - \xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3) + \xi_2^2 - 6\xi_2\xi_3 + 11\xi_3^2 = \\ &= 2(\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2^2 + \xi_3)^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 - 4\xi_2\xi_3 + 9\xi_3^2 = \\ &= 2(\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2^2 + \xi_3)^2 + \frac{1}{2}(\xi_2^2 - 8\xi_2\xi_3) + 9\xi_3^2 = \\ &= 2(\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2^2 + \xi_3)^2) + \frac{1}{2}(\xi_2 - 4\xi_3)^2 + \xi_3^2 \end{aligned}$$

de unde se vede că în adevăr forma este pozitiv definită.

3.4 Spaţii euclidiene (unitare)

3.4.1 Definiţii, proprietăţi simple

Definiţia 3.4.1 *Un spaţiu vectorial real V se numeşte spaţiu euclidian dacă pe el s-a definit un produs scalar, adică o formă bilineară simetrică a cărei formă pătratică asociată este pozitiv definită.*

Dacă vom nota prin $< x, y >$ valoarea produsului scalar pentru vectorii x, y vom avea din definiţie proprietăţile produsului scalar:

- $\forall x, y, z \in V :< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$;
- $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall x, y \in V :< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$;
- $\forall x, y, z \in V :< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$;
- $\forall \mu \in \mathbf{R}, \forall x, y \in V :< x, \mu y >= \mu < x, y >$;
- $\forall x \in V :< x, x >\geq 0$;
- $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definiţia 3.4.2 *Dacă $e_1, e_2, \cdots, e_n$ este o bază a spaţiului euclidian V matricea formei bilineare care defineşte produsul scalar*

$$G = \begin{pmatrix} < e_1, e_1 > & < e_1, e_2 > & ... & < e_1, e_n > \\ < e_2, e_1 > & < e_2, e_2 > & ... & < e_2, e_n > \\ \vdots & & & \\ < e_n, e_1 > & < e_n, e_2 > & ... & < e_n, e_n > \end{pmatrix}$$

se numeşte matricea Gram a produsului scalar în baza dată. Ea este o matrice simetrică.

Uneori va fi comod să considerăm că matricea Gram se scrie sub forma

$$G = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$$

unde produsele se înţeleg ca produse scalare.

Dacă notăm prin X, Y coloanele coordonatelor vectorilor atunci vom avea

$$< x, y >= X^t G Y = Y^t G X.$$

Conform criteriului lui Sylvester determinanţii diagonali extraşi din matricea Gram începând din colţul stânga sus sunt strict pozitivi.

Definiţia 3.4.3 *Dacă $x_1, x_2, \cdots, x_k$ sunt vectori în spaţiul euclidian V, determinantul*

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \begin{vmatrix} < x_1, x_1 > & < x_1, x_2 > & \ldots & < x_1, x_k > \\ < x_2, x_1 > & < x_2, x_2 > & \ldots & < x_2, x_k > \\ \vdots & & & \\ < x_k, x_1 > & < x_k, x_2 > & \ldots & < x_k, x_k > \end{vmatrix}$$

se numeşte determinanul Gram al vectorilor $x_1, x_2, \cdots, x_k$.

Teorema 3.4.1 *Determinantul Gram al vectorilor $x_1, x_2, \cdots, x_k$ este pozitiv, el fiind nul numai dacă vectorii sunt linear dependenţi.*

In adevăr, dacă considerăm o combinaţie lineară a acestor vectori

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$$

înmulţind scalar această combinaţie pe rând cu $x_1, x_2, \cdots, x_k$ obţinem un sistem linear omogen cu necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$. Acest sistem are numai soluţia banală, adică vectorii sunt linear independenţi, dacă şi numai dacă determinantul Gram este nenul. Dacă determinantul Gram este nenul, vectorii daţi pot fi consideraţi bază a spaţiului generat de ei. Restricţia produsului scalar pe acest spaţiu are ca matrice Gram o matrice al cărui determinant, determinantul Gram al vectorilor, este strict pozitiv, cctd.

Rezultă că are sens definiţia

Definiţia 3.4.4 *Numărul $\sqrt{< x, x >}$ se numeşte mărimea sau modulul vectorului x şi se notează prin $|x|$.*

Evident, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. In plus $|\lambda x| = |\lambda||x|$.

Definition 1 *Un vector x cu mărimea egală cu unitate $|x| = 1$ se numeşte versor.*

Din teorema precedentă rezultă că oricare ar fi x, y din V are loc inegalitatea

$$\begin{vmatrix} <x,x> & <x,y> \\ <y,x> & <y,y> \end{vmatrix} = |x|^2|y|^2 - <x,y>^2 \geq 0,$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă vectorii x, y sunt linear dependenţi.

In spaţiul vectorilor de poziţie în raport cu originea O, ecuaţia $\overrightarrow{r}\overrightarrow{N} + D = 0$ este verificată de vectorii de poziţie ai punctelor unui plan cu normala $\overrightarrow{N} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$. Pentru un punct M_0 din spaţiu cu vectorul de poziţie $\overrightarrow{r_0}$ avem $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})\overrightarrow{N} = -(\overrightarrow{r_0}\overrightarrow{N} + D)$. După inegalitatea de mai sus, pentru orice punct din plan avem

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})^2 \geq \frac{(\overrightarrow{r_0}\overrightarrow{N} + D)^2}{\overrightarrow{N}^2}$$

egalitatea atingându-se numai când $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$ este colinear cu normala la plan. Regăsim formula pentru distanţa de la punctul M_0 la plan

$$d = \frac{|\overrightarrow{r_0}\overrightarrow{N} + D|}{|\overrightarrow{N}|}.$$

Teorema 3.4.2 *Oricare ar fi vectorii x, y din spaţiul euclidian are loc inegalitatea Schwarz-Cauchy-Buniacovschi*

$$| <x,y> | \leq |x||y|,$$

egalitatea având loc numai dacă vectorii sunt linear dependenţi.

Din inegalitatea Schwarz-Cauchy-Buniacovschi rezultă

Teorema 3.4.3 *Oricare ar fi vectorii x, y din spaţiul euclidian are loc inegalitatea triunghiului*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

In adevăr, are loc

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= <x+y, x+y> = |x|^2 + 2 <x,y> + |y|^2 \leq \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

Uneori se numèşte inegalitatea triunghiului şi inegalitatea

$$|x - y| \leq |x - z| + |y - z|.$$

Definiţia 3.4.5 *Un spaţiu vectorial se numeşte normat dacă fiecărui element x i se asociază un număr real $|x|$ numit norma vectorului x cu proprietăţile*

$$\begin{array}{ll} a) & |x| \geq 0 \\ b) & |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ c) & |\lambda x| = |\lambda||x| \\ d) & |x+y| \leq |x| + |y|. \end{array}$$

Concludem că orice spaţiu vectorial euclidian este spaţiu vectorial normat.

Din inegalitatea Schwarz-Cauchy-Buniacovschi rezultă că are sens

Definiţia 3.4.6 *Se numeşte unghi dintre doi vectori nenuli x, y dintr-un spaţiu euclidian numărul $\theta \in [0, \pi]$ dat de relaţia*

$$\cos\theta = \frac{< x, y >}{|x||y|}.$$

Are loc relaţia $< x, y >= |x||y| \cos\theta$.

Definiţia 3.4.7 *Doi vectori x, y pentru care $< x, y >= 0$ se numesc ortogonali.*

Din demonstraţia teoremei 3. rezultă

Teorema 3.4.4 *(Teorema lui Pitagora) Dacă vectorii x, y sunt ortogonali atunci şi numai atunci are loc relaţia $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.*

Teorema 3.4.5 *Oricare ar fi x, y din spaţiul euclidian au loc relaţiile paralelogramului*

$$\begin{aligned} |x+y|^2 + |x-y|^2 &= 2(|x|^2 + |y|^2), \\ |x+y|^2 - |x-y|^2 &= 2 < x, y > . \end{aligned}$$

Se poate arăta că dacă într-un spaţiu vectorial normat are loc prima relaţie a paralelogramului, atunci în el se poate introduce un produs scalar definit de a doua relaţie a paralelogramului.

Din teorema 3.4.1 rezultă

Teorema 3.4.6 *Dacă vectorii $x_1, x_2, \cdots, x_k$ sunt doi câte doi ortogonali atunci ei sunt linear independenţi.*

Definiţia 3.4.8 *O bază ai cărei vectori sunt ortogonali doi câte doi se numeşte ortogonală. Dacă în plus vectorii bazei sunt şi versori baza se numeşte ortonormată.*

Matricea Gram a unei baze ortonormate este matricea unitate $G = I$ şi expresia produsului scalar a doi vectori x, y ale căror coloane de coordonate pe baza ortonormată sunt X, Y este

$$< x, y >= X^t Y = Y^t X.$$

Mărimea vectorului x este

$$|x| = \sqrt{X^t X} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}.$$

De aici rezultă că într-un spaţiu euclidian sunt preferate bazele ortonormate. Acestea există cum rezultă din teorema

Teorema 3.4.7 *Dacă* $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ *este o bază oarecare în spaţiul euclidian* V *atunci există o bază ortonormată* $e' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ *astfel încât oricare ar fi* $k = 1, 2, \cdots n$ *subspaţiul generat de primii* k *vectori din* e $[e_1, e_2, \cdots, e_k]$ *coincide cu subspaţiul generat de primii* k *vectori din* e' $[e'_1, e'_2, \cdots, e'_k]$.

Demonstraţia este constructivă şi este dată de aşa numitul *procedeu Gram-Schmidt de ortonormalizare a bazei* e :

Vom lua $e''_1 = e_1$ şi cum $|e_1| \neq 0$ putem lua $e'_1 = \frac{e''_1}{|e''_1|}$. Evident $[e_1] = [e'_1]$.

Mai departe vom lua $e''_2 = e_2 - \lambda_{21} e'_1$ şi vom determina λ_{21} din condiţia $e''_2 \perp e'_1$ adică $\lambda_{21} =< e_2, e'_1 >$. Avem $|e''_2| \neq 0$ pentru că altfel e_1, e_2 ar fi linear dependenţi. Putem deci lua $e'_2 = \frac{e''_2}{|e''_2|}$. Evident $[e_1, e_2] = [e'_1, e'_2]$ (subspaţiul generat de e_1, e_2 coincide cu subspaţiul generat de e'_1, e'_2).

Presupunem că au fost construiţi primii $k - 1$ vectorii $e'_1, e'_2, \cdots, e'_{k-1}$.

Mai departe vom lua $e''_k = e_k - \lambda_{k,1} e'_1 - \lambda_{k,2} e'_2 - \cdots - \lambda_{k,k-1} e'_{k-1}$ şi vom determina coeficienţii din condiţiile $e''_k \perp e'_1, e''_k \perp e'_2, \cdots, e''_k \perp e'_{k-1}$ adică $\lambda_{k,1} =< e_k, e'_1 >$, $\lambda_{k,2} =< e_k, e'_2 >$, $\cdots$, $\lambda_{k,k-1} =< e_k, e'_{k-1} >$. Avem $|e''_k| \neq 0$ pentru că altfel vectorii $e_1, e_2, \cdots, e_k$ ar fi linear dependenţi. Putem lua deci $e'_k = \frac{e''_k}{|e''_k|}$. Avem $[e_1, e_2, \cdots, e_k] = [e'_1, e'_2, \cdots, e'_k]$.

Continuând procedeul construim toate cele n elemente ale bazei ortonormate.

Dacă se trece de la baza ortonormată $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la baza ortonormată $e' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ cu ajutorul matricei de trecere $S : e' = eS$ atunci dat fiind că în ambele baze matricele Gram sunt matricele unitate, avem

$$I = S^t S.$$

Definiţia 3.4.9 *O matrice pătratică S se numeşte ortogonală dacă satisface relaţia $S^t S = I$.*

Avem deci

Teorema 3.4.8 *Intr-un spaţiu euclidian se trece de la o bază ortonormată la o altă bază ortonormată cu ajutorul unei matrice ortogonale.*

Notăm că dacă S este o matrice ortogonală atunci inversa sa coincide cu transpusa sa $S^{-1} = S^t$.

Fie x un vector în spaţiul euclidian V şi fie V' un subspaţiu în care considerăm o bază ortonormată $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$. Ne propunem să găsim în V' un vector $x' = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_k e_k$ astfel încât x' să aproximeze în V' cel mai bine pe x, adică $|x - x'|$ să fie cât mai mică posibil. Cum putem scrie

$$|x - x'|^2 = |x - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \cdots - \lambda_k e_k, x - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \cdots - \lambda_k e_k|^2 =$$

$$= |x|^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 - 2\lambda_1 < x, e_1 > -2\lambda_2 < x, e_2 > - \cdots - 2\lambda_k < x, e_k >=$$

$$= |x|^2 + (\lambda_1 - < x, e_1 >)^2 + (\lambda_2 - < x, e_2 >)^2 + \cdots + (\lambda_k - < x, e_k >)^2 -$$

$$- < x, e_1 >^2 - < x, e_2 >^2 - \cdots - < x, e_k >^2$$

rezultă că $|x - x'|$ este minim pentru $\lambda_1 =< x, e_1 >, \lambda_2 =< x, e_2 >, \cdots, \lambda_k =< x, e_k >$ adică, dacă

$$x' =< x, e_1) e_1 + < x, e_2 > e_2 + \cdots + < x, e_k > e_k.$$

Definiţia 3.4.10 *Dacă $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$ este o bază ortonormată a subspaţiului V' numerele $< x, e_1 >, < x, e_2 >, \cdots, < x, e_k >$ se numesc coeficienţii Fourier ai elementului x pe acea bază.*

Se vede uşor că are sens

Definiţia 3.4.11 *Dacă V' este un subspaţiu al spaţiului euclidian V mulţimea vectorilor ortogonali pe orice vector din V' constituie un spaţiu vectorial numit subspaţiul complement ortogonal al lui V'; el se notează prin $V'^{\perp}$.*

Dacă completăm baza $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$ a lui V' până la o bază a lui V prin elementele $e_{k+1}, e_{k+2}, \cdots, e_n$ atunci $V'^{\perp}$ este subspaţiul generat de acestea şi V este sumă directă între V' şi $V'^{\perp}$.

Vectorul $x' =< x, e_1)e_1+ < x, e_2 > e_2 + \cdots + < x, e_k > e_k$ este *proiecţia ortogonală a lui x pe subspaţiul V'*, iar $x - x'$ este *componenta lui x ortogonală pe V'*. Am demonstrat de fapt teoremele analoage teoremelor cunoscute din geometrie

Teorema 3.4.9 *Proiecţia ortogonală a unui vector x pe subspaţiul V' este vectorul din V' care aproximează cel mai bine pe x.*

Teorema 3.4.10 *Mărimea componentei lui x ortogonală pe subspaţiul V' este minimul mărimii $|x - x'|$ pentru $x' \in V'$ (perpendiculara este mai mică decât orice oblică).*

Revenind la procedeul de ortonormalizare al lui Gram-Schmidt vom observa că la pasul k se ia de fapt versorul componentei lui e_k ortogonală pe subspaţiul generat de primii $k - 1$ vectori din bază.

Dacă în subspaţiul V' generat de vectorii linear independenţi $x_1, x_2, \cdots, x_k$ vrem să găsim vectorul $x' = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$ care aproximează cel mai bine vectorul x va trebui să scriem că $x - x'$ este ortogonal pe V' adică să rezolvăm sistemul

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &< x_1, x_1 > +\lambda_2 < x_1, x_2 > + \cdots + \lambda_k < x_1, x_k >=< x_1, x > \\
\lambda_1 &< x_2, x_1 > +\lambda_2 < x_2, x_2 > + \cdots + \lambda_k < x_2, x_k >=< x_2, x > \\
& \cdots \\
\lambda_1 &< x_k, x_1 > +\lambda_2 < x_k, x_2 > + \cdots + \lambda_k < x_k, x_k >=< x_k, x >
\end{aligned}$$

al cărui determinant este determinantul Gram $G(x_1, x_2, \cdots, x_k) \neq 0$. Vom observa că

din unicitatea lui $x - x'$ putem scrie că

$$x - x' = \frac{1}{G(x_1, x_2, \cdots, x_k)} \begin{vmatrix} <x_1, x_1> & <x_1, x_2> & \cdots & <x_1, x_k> & x_1 \\ <x_2, x_1> & <x_2, x_2> & \cdots & <x_2, x_k> & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ <x_k, x_1> & <x_k, x_2> & \cdots & <x_k, x_k> & x_k \\ <x, x_1> & <x, x_2> & \cdots & <x, x_k> & x \end{vmatrix}$$

unde determinantul formal se consideră desvoltat după ultima coloană. Inmulţind scalar această relaţie cu x avem

$$<x - x', x> = \frac{G(x_1, x_2, \cdots, x_k, x)}{G(x_1, x_2, \cdots, x_k)}$$

sau chiar

$$|x - x'|^2 = <x - x', x - x'> = \frac{G(x_1, x_2, \cdots, x_k, x)}{G(x_1, x_2, \cdots, x_k)}.$$

Ultima relaţie ne arată că începând cu lungimea unui vector, cu aria unui paralelogram, cu volumul unui paralelipiped, din aproape în aproape putem interpreta determinantul Gram $G(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ ca pătratul ”volumului paralelipipedului” construit pe vectorii $x_1, x_2, \cdots, x_k$.

Ultimele lucruri se aplică în aşa numita metodă a celor mai mici pătrate.

3.4.2 Exerciţii

1. Să se arate că în orice spaţiu euclidian, pentru orice vectori nenuli are loc relaţia

$$\left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right| = \frac{|x - y|}{|x||y|}.$$

2. Să se arate că pentru orice vectori are loc inegalitatea

$$|z||x - y| \leq |x||y - z| + |y||x - z|.$$

3. Să se arate că are loc inegalitatea lui Ptolemeu

$$|z - w||x - y| \leq |x - w||y - z| + |y - w||x - z|.$$

4. Să se arate că în spaţiul vectorial $P_n[R]$ al polinoamelor de grad cel mult n se poate introduce produsul scalar cu ponderea $\rho(x)$, funcţie absolut integrabilă pe

intervalul $[a, b]$, prin relaţia $< p(x), q(x) >= \int\limits_a^b \rho(x)p(x)q(x)dx$. Polinoamele ortogonale în raport cu acest produs scalar se numesc polinoame ortogonale pe $[a, b]$ cu ponderea $\rho(x)$.

5. Să se arate că polinoamele $t_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ sunt polinoame ortogonale pe $[-1, 1]$ cu ponderea $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ele se numesc polinoamele lui Cebâşev.

6. Dacă notăm prin $m_k = \int\limits_a^b \rho(x)x^k dx$ momentul de ordinul k al ponderii $\rho(x)$ pe intervalul $[a, b]$, atunci determinanul Gram al polinoamelor $1, x, x^2, \cdots, x^k$ este determinantul

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_k \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{k+1} \\ . & . & . & . \\ m_k & m_{k+1} & \cdots & m_{2k} \end{vmatrix}.$$

7. Să se arate că şirul polinoamelor ortogonale pe $[a, b]$ cu ponderea $\rho(x)$ cu coeficientul puterii celei mai mari egal cu unitatea este dat cu notaţiile dela exerciţiul precedent de relaţia

$$\omega_k(x) = \frac{1}{\Delta_{k-1}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{k-1} & 1 \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_k & x \\ . & . & . & . & . \\ m_{k-1} & m_k & \cdots & m_{2k-2} & x^{k-1} \\ m_k & m_{k+1} & \cdots & m_{2k-1} & x^k \end{vmatrix}, k = 0, 1, 2, \cdots n.$$

8. Să se arate că şirul din exerciţiul precedent poate fi construit din aproape în aproape prin

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &= 1, \\ \omega_1(x) &= x - \alpha_1, \alpha_1 = \frac{< x, 1.}{< 1, 1 >}, \\ & \cdots \\ \omega_n(x) &= (x - \alpha_n)\omega_{n-1}(x) + \beta_n \omega_{n-2}(x), unde \\ \alpha_n &= \frac{< x\omega_{n-1}(x), \omega_{n-1}(x) >}{< \omega_{n-1}(x), \omega_{n-1}(x) >}, \beta_n = \frac{< x\omega_{n-1}(x), \omega_{n-2}(x) >}{< \omega_{n-2}(x), \omega_{n-2}(x) >}. \end{aligned}$$

9. Să se construiască primele 4 polinoame ortogonale ale lui Legendre, adică polinoamele ortogonale pe $[-1, 1]$ cu ponderea $\rho(x) = 1$.

3.4.3 Endomorfism adjunct

Definiţia 3.4.12 *Fie $f : V \to V$ un endomorfism pe spaţiul euclidian V. Un endomorfism $f^* : V \to V$ se numeşte endomorfism adjunct al lui T dacă pentru orice $x, y \in V$ are loc relaţia $< f(x), y >=< x, f^*(y) >$.*

Dacă $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ este o bază ortonormată a lui V, fie A, A^* matricele asociate lui f respectiv f^* pe această bază şi X, Y coloanele coordonatelor vectorilor x, y pe aceeaşi bază. Din definiţia endomorfismului adjunct rezultă

$$Y^t AX = X^t A^* Y = Y^t A^{*t} X.$$

Cum x, y sunt arbitrari rezultă $A^* = A^t$. Avem

Teorema 3.4.11 *Dacă endomorfismul $f : V \to V$ are pe o bază ortonormată matricea asociată A, atunci adjunctul său f^* are pe aceeaşi bază matricea A^t.*

Teorema 3.4.12 *Dacă subspaţiul V' al spaţiului euclidian V este invariat de endomorfismul $f : V \to V$, atunci complementul ortogonal $V'^{\perp}$ este invariat de endomorfismul adjunct f^*.*

In adevăr, fie $y \in V'^{\perp}$ şi $x \in V'$. Atunci $< f^*(y), x >=< f(x), y >= 0$ pentru că $f(x) \in V'$. Cum $x \in V'$ este arbitrar, rezultă $f^*(y) \in V'^{\perp}$.

3.4.4 Endomorfisme autoadjuncte (simetrice)

Definiţia 3.4.13 *Endomorfismul spaţiului euclidian V $f : V \to V$ se numeşte autoadjunct dacă el coincide cu adjunctul său, adică oricare ar fi $x, y \in V$ are loc relaţia de reciprocitate $< f(x), y >=< f(y), x >$.*

Dacă $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ este o bază ortonormată şi $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sunt numere reale, atunci endomorfismul

$$T(x) = \lambda_1 < x, f_1 > f_1 + \lambda_2 < x, f_2 > f_2 + \cdots + \lambda_n < x, f_n > f_n$$

este autoadjunct pentru că se verifică imediat că $< T(x), y >=< x, T(y) >$. Pe baza $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ matricea endomorfismului este diagonală, pe diagonală fiind numerele $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Vom arăta că aceasta este caracteristica endomorfismelor autoadjuncte.

Exemplul 3.4.4.1 *Endomorfismul s_u definit pe spaţiul vectorilor de poziţie prin*

$$s_u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$$

este autoadjunct pentru că se verifică imediat că $s_u(\overrightarrow{x})\overrightarrow{y} = s_y(\overrightarrow{y})\overrightarrow{x}$. Reamintim că acest endomorfism este simetria vectorilor de poziţie în raport cu planul care trece prin origine de normală $\overrightarrow{u}$. Intr-un spaţiu euclidian oarecare endomorfismul $s_u(x) = x - 2 < x, u > u$ se mai numeşte şi endomorfismul lui Hausholder. Dacă notăm cu U coloana componentelor versorului u pe o bază ortonormată, atunci matricea endomorfismului lui Hausholder este $I - 2UU^t$, evident simetrică.

Teorema 3.4.13 *Un endomorfism este autoadjunct dacă şi numai dacă matricea sa pe o bază ortonormată este simetrică.*

Din acest motiv, un endomorfism autoadjunct se mai numeşte şi *simetric.*

Relaţia din definiţia endomorfismului autoadjunct este o *relaţie de reciprocitate.* Are loc

Teorema 3.4.14 *Dacă $f : V \to V$ este o funcţie pe spaţiul euclidian V care verifică pentru orice vectori $x, y \in V$ relaţia de reciprocitate $< f(x), y >=< f(y), x >$, atunci acea funcţie este un endomorfism autoadjunct.*

In adevăr, dacă $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ este o bază ortonormată, fie valorile funcţiei pe elementele bazei

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \cdots + \alpha_{n1}e_n \\
f(e_2) &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{n2}e_n \\
&\cdots \\
f(e_n) &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \cdots + \alpha_{nn}e_n.
\end{aligned}$$

Din condiţia de reciprocitate $< f(e_i), e_j >=< f(e_j), e_i >$ rezultă $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ pentru orice $i, j = 1 \cdots n$. Dacă $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$ şi $f(x) = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n$ aplicând relaţiile de reciprocitate $< f(x), e_1 >=< f(e_1), x >$, $< f(x), e_2 >=< f(e_2), x >$, $\cdots, < f(x), e_n >=< f(e_n), x >$ avem

$$\eta_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \cdots + \alpha_{n1}\xi_n$$

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{n2}\xi_n \\
&\cdots \\
\eta_n &= \alpha_{1n}\xi_1 + \alpha_{2n}\xi_2 + \cdots + \alpha_{nn}\xi_n
\end{aligned}$$

care demonstrează teorema.

Exemplul 3.4.4.2 *In unele probleme de mecanică apar asemenea endomorfisme autoadjuncte. Ca exemplu remarcabil considerăm problema acţiunilor interioare într-un mediu continuu sub acţiuni exterioare. Dacă un mediu continuu este separat în două părţi de o suprafaţă interioară cu o normală, trebuie să admitem că mediul din partea spre care este îndreptată normala acţionează asupra celeilalte părţi cu o forţă. Suntem imediat conduşi să admitem că în vecinătatea unui punct dat al suprafeţei această forţă depinde de punctul respectiv, de normala la suprafaţă în acel punct şi că este proporţională cu suprafaţa acelei vecinătăţi. Pentru o porţiune de suprafaţă da în jurul punctului* $P(x, y, x)$, *această forţă va fi* $\overrightarrow{T}(x, y, z, \overrightarrow{n})da$, $\overrightarrow{T}(x, y, z, \overrightarrow{n}) = \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n})$ *fiind vectorul tensiune sau efort unitar în punctul* P. *Dacă în punctul* P *considerăm un cilindru circular cu generatoarele paralele cu* $\overrightarrow{n}$ *cu bază cerc de rază* ε *de înălţime* ε^2 *şi aplicăm teorema impulsului avem*

$$\int_D \rho(Q)\overrightarrow{a}(Q)dv_Q = \int_D \overrightarrow{f}dv_Q + \int_{\partial D} \overrightarrow{T}(Q, \overrightarrow{n})da_Q,$$

unde am notat cu Q *punctul curent fie în interiorul cilindrului* D *fie pe suprafaţa* ∂D *a sa. Integralele de volum sunt de ordinul lui* ε^4, *integrala pe suprafaţa laterală este de ordinul lui* ε^3, *integralele pe baze fiind* $\overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n})\pi\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$, *respectiv* $\overrightarrow{T}(P, -\overrightarrow{n})\pi\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$. *Dacă împărţim cu* ε^2 *şi facem* $\varepsilon \to 0$ *obţinem rezultatul aşteptat*

$$\overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n}) + \overrightarrow{T}(P, -\overrightarrow{n}) = 0$$

Dacă în punctul P considerăm doi vectori de mărime ε cu versorii $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ şi opuşii lor şi prin extremităţile lor ducem plane perpendiculare pe ei şi două plane perpendiculare pe acestea la distanţe $\frac{\varepsilon}{2}$ de P obţinem o prismă dreaptă $A'B'C'D'D''C''B''A''$ ale cărei baze sunt romburi de laturi $l = \frac{2\varepsilon}{|\overrightarrow{u}|}$ şi ale cărei feţe laterale sunt pătrate cu aceeaşi latură. Am notat $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$. Fie E, F, G, H centrele feţelor laterale cu normalele

$\overrightarrow{n_1}, -\overrightarrow{n_2}, -\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$. Scriem teorema momentului cinetic pentru această prismă în raport cu centrul său P

$$\int_D \rho_Q \left(\overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P}\right) \times \overrightarrow{a_Q} dv_Q = \int_D \left(\overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P}\right) \times \overrightarrow{F_Q} dv_Q + \int_{\partial D} \left(\overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P}\right) \times \overrightarrow{T}(Q, \overrightarrow{n_Q}) da_Q.$$

Cum datorită teoremei de medie avem

$$\begin{aligned} \rho_Q \overrightarrow{a_Q} &= \rho_P \overrightarrow{a_P} + O(\varepsilon) \\ \overrightarrow{F_Q} &= \overrightarrow{F_P} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

şi pentru că P este centrul prismei

$$\int_D \left(\overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P}\right) dv_Q = 0$$

integralele de volum sunt de ordinul lui ε^5. Integrala de suprafaţă se desface în suma integralelor pe fiecare faţă. Integrala pe faţa $A'B'C'D'D''C''B''A''$ se poate scrie

$$\int_{A'..A''} \left(\overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_P}\right) \times \overrightarrow{T}(Q, \overrightarrow{n_Q}) da_Q = \left(\overrightarrow{r_E} - \overrightarrow{r_P}\right) \times \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n_1}) l^2 + o(\varepsilon^5),$$

la fel celelalte integrale. Avem astfel

$$\left[(\overrightarrow{n_2} \times \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n_1}) - (\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n_2}) \right] \frac{8\varepsilon^3}{|\overrightarrow{u}|^4} +$$

$$+ \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{u}) \frac{8\varepsilon^3}{|\overrightarrow{u}|^2} + o(\varepsilon^5) = 0$$

Impărţind cu ε^3 şi făcând $\varepsilon \to 0$ avem

$$(\overrightarrow{n_2} \times \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n_1}) - (\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n_2}) + |\overrightarrow{u}|^2 \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{u}) = 0.$$

Inmulţind scalar cu $\overrightarrow{u}$ avem relaţia de reciprocitate

$$\overrightarrow{n_2} \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n_1}) - \overrightarrow{n_1} \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n_2}) = 0.$$

Rezultă că dacă scriem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n}) &= T_{nx} \overrightarrow{i} + T_{ny} \overrightarrow{j} + T_{nz} \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{n} &= n_x \overrightarrow{i} + n_y \overrightarrow{j} + n_z \overrightarrow{k} \end{aligned}$$

vom putea scrie

$$\begin{pmatrix} T_{nx} \\ T_{ny} \\ T_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

matricea fiind simetrică, componentele depinzând de punctul P. T_{xy} reprezintă componenta după $\overrightarrow{j}$ a tensiunii pe o faţă normală la $\overrightarrow{i}$ sau componenta după $\overrightarrow{i}$ a tensiunii pe o faţă normală la $\overrightarrow{j}$, etc. Aplicaţia lineară rezultată ca şi matricea sa se numeşte *tensorul tensiunii în punctul P.*

Endomorfismele autoadjuncte au o serie de proprietăţi remarcabile.

Teorema 3.4.15 *Toate rădăcinile polinomului caracteristic al unui endomorfism autoadjunct sunt reale, deci sunt valori proprii.*

In adevăr, fie A matricea endomorfismului autoadjunct şi λ o rădăcină, evenual complexă a polinomului caracteristic $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. Atunci sistemul

$$AX - \lambda X = 0$$

are o soluţie complexă nebanală X. Polinomul caracteristic având coeficienţii reali are şi rădăcina conjugată $\overline{\lambda}$. Vom avea atunci

$$A\overline{X} - \overline{\lambda X} = 0.$$

Inmulţind prima relaţie la stânga cu $\overline{X^t}$ şi a doua cu X^t şi scăzând avem

$$\overline{X^t}AX - X^tA\overline{X} - \lambda\overline{X^t}X + \overline{\lambda}X^t\overline{X} = 0.$$

Dar

$$\overline{X^t}AX - X^tA\overline{X} = \overline{X^t}AX - (\overline{X}^tA^tX)^t = \overline{X^t}AX - \overline{X^t}A^tX = 0$$

şi

$$X^t\overline{X} = (X^t\overline{X})^t = \overline{X^t}X \neq 0.$$

Rezultă $\lambda = \overline{\lambda}$ adică $\lambda \in \mathbf{R}$.

Teorema 3.4.16 *Vectorii proprii ai unui endomorfism autoadjunct corespunzători unor valori proprii diferite sunt ortogonali.*

In adevăr, dacă x, y sunt vectori proprii corespunzători valorilor proprii diferite λ, μ avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda x \\ f(y) &= \mu y. \end{aligned}$$

Inmulţind scalar prima relaţie cu y şi a doua cu x, prin scădere avem

$$< f(x), y > - < f(y), x >= (\lambda - \mu) < x, y >= 0$$

de unde $< x, y >= 0$.

Din teorema (3.4.12) rezultă

Teorema 3.4.17 *Dacă V' este un subspaţiu invariat de un endomorfism autoadjunct, atunci şi complementul ortogonal $V'^{\perp}$ este subspaţiu invariat de endomorfism.*

Demonstrăm acum o teoremă care ne permite să caracterizăm şi altfel endomorfismele autoadjuncte:

Teorema 3.4.18 *(teorema de caracterizare a endomorfismelor autoadjuncte) Dacă - $f : V \to V$ este un endomorfism autoadjunct pe spaţiul euclidian V, atunci există o bază ortonormată a lui V formată din vectori proprii ai endomorfismului f, bază pe care matricea endomorfismului are formă diagonală, pe diagonală fiind valorile proprii.*

Demonstrăm teorema prin inducţie în raport cu dimensiunea lui V. Pentru un spaţiu unidimensional teorema este evidentă pentru că aici orice vector nenul este propriu şi se poate lua ca bază un versor. Presupunem teorema adevărată pentru spaţiile euclidiene de dimensiune k-1 şi arătăm că este adevărată şi pentru spaţiile V de dimensiune k. Endomorfismul f are cel puţin o valoare proprie şi deci există cel puţin un spaţiu unidimensional V_1 invariant faţă de f. Fie e_1 versorul din acest subspaţiu. Complementul ortogonal $V_1^{\perp}$ este un subspaţiu de dimensiune $k-1$ invariant faţă de f. Restricţia lui f la $V_1^{\perp}$ este un endomorfism autoadjunct şi deci după ipoteză există o bază ortonormată a lui $V_1^{\perp}$ formată din vectorii $e_2, e_3, \cdots, e_k$ vectori proprii pentru restricţie şi deci şi pentru T. Este clar că vectorii $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_k$ alcătuiesc o bază ortonormată a lui V.

Baza din enunţul teoremei se găseşte în modul obişnuit: se găsesc valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători. Dacă unei valori proprii îi corespund mai mulţi vectori proprii se ortonormalizează sistemul acestora.

Teorema demonstrată capătă formularea matriceală

Teorema 3.4.19 *(teorema de structură a matricelor simetrice) Dacă A este o matrice simetrică atunci există o matrice ortogonală S astfel că $A' = S^t AS$ este matrice diagonală.*

Sub o altă formă teorema (3.4.18) se enunţă

Teorema 3.4.20 *Dacă $f : V \to V$ este un endomorfism autoadjunct pe spaţiul euclidian V atunci există o bază ortonormată $e_1, e_2, \cdots, e_n$ a lui V şi numerele $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ astfel că pentru orice $x \in V$*

$$f(x) = \lambda_1 < x, e_1 > e_1 + \lambda_2 < x, e_2 > e_2 + \cdots + \lambda_n < x, e_n > e_n.$$

Sub formă matriceală avem

Teorema 3.4.21 *Dacă notăm cu $U_1, U_2, \cdots, U_n$ coloanele componentelor vectorilor proprii ai matricei simetrice A corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ atunci*

$$A = \lambda_1 U_1 U_1^t + \lambda_2 U_2 U_2^t + \cdots + \lambda_n U_n U_n^t.$$

Un endomorfism a cărui matrice pe o bază ortonormată este matricea unitate cu elementul α_{ii} înlocuit cu λ reprezintă o dilatare (comprimare) după direcţia versorului e_i. Teoremele precedente arată că orice endomorfism autoadjunct cu valori proprii nenule este de fapt o compunere de dilatări (comprimări) după n direcţii ortogonale două câte două. Unei valori proprii nule îi corespunde proiecţia ortogonală pe complementul ortogonal al subspaţiului propriu corespunzător valorii proprii nule. Unei valori proprii cu multiplicitatea algebrică m îi corespunde un subspaţiu invariant de dimensiune m.

Exemplul 3.4.4.3 *Endomorfismul s_u definit pe spaţiul vectorilor de poziţie prin*

$s_u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$ are vectorul propriu $\overrightarrow{u}$ corespunzător valorii proprii $\lambda = -1$ şi orice vector perpendicular pe $\overrightarrow{u}$ este vector propriu corespunzător valorii proprii

$\lambda = 1$. *Deci dacă notăm prin* $\overrightarrow{v}$ *un versor ortogonal pe* $\overrightarrow{u}$, *atunci* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$ *este o bază ortonormată pe care matricea lui* s_u *este*

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 3.4.4.4 *Ca aplicaţie a ultimei teoreme să rezolvăm următoarea problemă: un resort de lungime* l *şi coeficient de rigiditate* k *este legat de un perete fix. De capătul resortului este legat un corp de masă* m. *In continuare pe aceeaşi dreaptă de acest corp este legat un alt resort identic cu primul. De acesta este legat un corp de masă* m *de care se leagă un alt resort identic cu celelalte şi se fixează la un alt perete fix. Corpurile alunecă fără frecare pe o suprafaţă. Presupunem că masa resorturilor este neglijabilă. Dacă notăm prin* ξ_1, ξ_2 *abaterile corpurilor de la poziţia de echilibru putem scrie ecuaţiile de mişcare*

$$\begin{aligned} m\xi_1'' + k\xi_1 - k(\xi_2 - \xi_1) &= 0 \\ m\xi_2'' + k(\xi_2 - \xi_1) + k\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Prin accent am notat derivata în raport cu timpul. Trebuie determinată mişcarea celor două corpuri. Notând $\frac{k}{m} = \omega^2$ *se poate scrie matriceal*

$$X'' + AX = 0$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 2\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Cum matricea A *este simetrică există o matrice ortogonală* S *astfel ca matricea* $A' = S^t AS$ *este diagonală. Pentru a găsi matricea* S *şi matricea* A' *găsim valorile proprii şi vectorii proprii:*

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - 4\omega^2\lambda + 3\omega^4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \omega^2, \lambda_2 = 3\omega^2.$$

Versorul propriu corespunzător lui λ_1 este $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$, iar versorul propriu corespunzător lui λ_2 este $e_2' = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$ şi deci matricea S este

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

şi

$$A' = \begin{pmatrix} 3\omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Punând $X = SY$ ecuaţia matriceală iniţială devine $SY'' + ASY = 0$. După înmulţire la stânga cu S^t avem $Y'' + A'Y = 0$ adică sistemul

$$\begin{aligned} \eta_1'' + 3\omega^2\eta_1 &= 0, \\ \eta_2'' + \omega^2\eta_2 &= 0, \end{aligned}$$

a cărui soluţie este

$$\begin{aligned} \eta_1 &= A_1\cos(\omega\sqrt{3}t + \varphi_1), \\ \eta_2 &= A_2\cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1\cos(\omega\sqrt{3}t + \varphi_1) \\ A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}A_1\cos(\omega\sqrt{3}t + \varphi_1) - \frac{1}{\sqrt{2}}A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ \xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}A_1\cos(\omega\sqrt{3}t + \varphi_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}A_2\cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Constantele $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ se determină din condiţiile iniţiale. Expresiile lui ξ_1, ξ_2 pun în evidenţă aşa numitele *moduri fundamentale* η_1, η_2 şi *pulsaţiile fundamentale* $\omega\sqrt{3}, \omega$. Pulsaţiile fundamentale sunt legate evident de valorile proprii ale matricei A, ele fiind radicalii valorilor proprii. Aceasta este situaţia în care apar în multe aplicaţii practice valorile proprii ale matricelor.

3.4.5 Exerciţii

1. Să se studieze endomorfismul care pe baza ortnormată (e_1, e_2, e_3) are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

R. Pe baza obţinută cu matricea de trecere

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

endomorfismul are matricea

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Să se studieze endomorfismul care pe baza ortonormată (e_1, e_2, e_3) are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

R. Pe baza obţinută cu matricea de trecere

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

endomorfismul are matricea

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.4.6 Endomorfisme izometrice (ortogonale)

Definiţia 3.4.14 *Un endomorfism f al unui spaţiu euclidian V se numeşte izometric sau ortogonal dacă el păstrează produsul scalar, adică pentru orice $x, y \in V$ are loc relaţia $< f(x), f(y) >=< x, y >$.*

Relaţia din definiţie justifică denumirea de izometric (aceeaşi metrică).

Exemplul 3.4.6.1 *Endomorfismul s_u definit pe spaţiul vectorilor de poziţie prin*

$s_u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$ este izometric pentru că se verifică imediat că $s_u(\overrightarrow{x})s_y(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}$. Intr-un spaţiu euclidian oarecare endomorfismul lui Hausholder $s_u(x) = x - 2 < x, u > u$ este şi simetric şi izometric.

Teorema 3.4.22 *Endomorfismul f al spaţiului euclidian V este izometric dacă şi numai dacă păstrează mărimea (norma) vectorilor, adică pentru orice $x \in V$ avem $|f(x)| = |x|$.*

In adevăr din definiţie, pentru $y = x$ rezultă $< f(x), f(x) >=< x, x >$ adică $|f(x)| = |x|$. Invers dacă pentru orice $x \in V$ avem $|f(x)|^2 = |x|^2$ din relaţia

$$< f(x+y), f(x+y) >= |f(x)|^2 + 2 < f(x), f(y) > +|f(y)|^2 =$$

$$= |x+y|^2 = |x|^2 + 2 < x, y > +|y|^2$$

rezultă $< f(x), f(y) >=< x, y >$.

Teorema 3.4.23 *Endomorfismul f al spaţiului euclidian V este izometric dacă şi numai dacă are invers şi inversul său coincide cu adjunctul său.*

In adevăr, dacă f este izometric rezultă că pentru orice $x, y \in V$ avem

$$< x, f^*(f(y)) >=< f(x), f(y) >=< x, y >$$

adică $< x, f^*(f(y)) - y >= 0$ pentru orice x. Rezultă $f^*(f(y)) = y$ pentru orice y. Deci $f^* \circ f = i$ sau $f^{-1} = f^*$. Reciproca se verifică imediat.

Matriceal putem enunţa

Teorema 3.4.24 *Endomorfismul f al spaţiului euclidian V este izometric dacă şi numai dacă într-o bază ortonormată a lui V îi corespunde o matrice ortogonală $A : A^{-1} = A^t$.*

Matricea $A = I - 2UU^t$ a endomorfismului lui Hausholder este ortogonală.

Din teorema precedentă rezultă

Teorema 3.4.25 *Endomorfismul f al spaţiului euclidian V este izometric dacă şi numai dacă el transformă elementele unei baze ortonormate tot în elementele unei baze ortonormate.*

Intr-un spaţiu euclidian n-dimensional un endomorfism izometric este determinat deci de

$$n^2 - [n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1] = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

parametri reali.

Teorema 3.4.26 *Determinantul matricei unui endomorfism izometric pe o bază ortonormată este* ± 1.

Teorema 3.4.27 *Rădăcinile polinomului caracteristic al unei matrice ortogonale cu elemente reale au modulul egal cu unitatea.*

Fie A matrice ortogonală şi λ o rădăcină a ecuaţiei $\det(A-\lambda I)=0$. Atunci sistemul $(A-\lambda I)X = 0$ are o soluţie nebanală eventual complexă. Din relaţia $AX = \lambda X$ prin transpunere şi conjugare avem $\overline{X}^t A^t = \overline{\lambda X}$. Inmulţind membru cu membru avem $\overline{X}^t A^t AX = \overline{\lambda}\lambda\overline{X}X$ de unde, ţinând cont că $A^tA = I$, rezultă $\overline{\lambda}\lambda = 1$.

Teorema 3.4.28 *Dacă subspaţiul* V' *al spaţiului euclidian* V *este invariat de endomorfismul izometric* f *atunci şi complementul său ortogonal* $V'^{\perp}$ *este invariat de endomorfism.*

In adevăr, $V'^{\perp}$ este invariat de $f^* = f^{-1}$ şi deci şi de $f = (f^{-1})^{-1}$.

Dacă V este un spaţiu euclidian unidimensional, este evident că există doar două endomorfisme izometrice: cel pentru care $f(x) = x$ pentru orice $x \in V$ şi cel pentru care $f(x) = -x$ pentru orice $x \in V$.

Fie acum V un spaţiu euclidian de dimensiune 2, $dim(V) = 2$ şi f un endomorfism izometric al său. Spaţiul V este izomorf cu spaţiul vectorilor de poziţie ai punctelor dintr-un plan. Dacă

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

este matricea endomorfismului pe o bază ortonormată, atunci sau $\det(A) = -1$ sau $\det(A) = 1$. Avem în plus

$$\begin{aligned} (\alpha_{11})^2 + (\alpha_{12})^2 &= 1 \\ \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} &= 0 \\ (\alpha_{21})^2 + (\alpha_{22})^2 &= 1 \end{aligned}$$

Din ultima condiţie rezultă că există φ astfel că $\alpha_{21} = sin\varphi, \alpha_{22} = cos\varphi$. A doua condiţie împreună cu condiţia $\det(A) = -1$ conduce la sistemul

$$\begin{aligned} \alpha_{11} sin\varphi + \alpha_{12} cos\varphi &= 0 \\ \alpha_{11} cos\varphi - \alpha_{12} sin\varphi &= -1 \end{aligned}$$

de unde rezultă $\alpha_{11} = -cos\varphi, \alpha_{12} = sin\varphi$. Am găsit deci

$$A = \begin{pmatrix} -cos\varphi & sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$$

adică o matrice ortogonală simetrică cu polinomul caracteristic $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ cu valorile proprii $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ cărora le corespund versorii proprii ortogonali e_1, e_2. Endomorfismul este deci o simetrie faţă de dreapta de versor e_2.

Dacă luăm condiţia $\det(A) = 1$ găsim

$$A = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$$

adică endomorfismul poate fi considerat o rotaţie plană de unghi φ.

Cum polinomul caracteristic al unui endomorfism izometric pe un spaţiu euclidian are cel puţin o rădacină reală de modul 1 sau o pereche de rădăcini complexe de modul 1 se poate demonstra imediat prin inducţie completă ca la teorema (3.4.18) următoarea

Teorema 3.4.29 *(de structură a endomorfismelor izometrice) Dacă f este un endomorfism izometric al spaţiului euclidian V atunci spaţiul V se poate scrie ca o sumă directă de subspaţii de dimensiune cel mult doi invariante faţă de f şi două câte două ortogonale.*

Cu un enunţ matriceal avem

Teorema 3.4.30 *(de structură a matricelor ortogonale) Dacă A este o matrice ortogonală de ordin n atunci există o matrice ortogonală S astfel încât $B = S^{-1}AS$ unde B este o matrice de forma*

$$B = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_s \end{pmatrix}$$

unde C_i sunt matrice ortogonale de ordinul $n_i \leq 2$; pentru $n_i = 1$ avem$C_i = \pm 1$, iar pentru $n_i = 2$ C_i este o matrice de rotaţie plană; $n_1 + n_2 + \cdots n_s = n$.

In spaţiul vectorilor liberi sau al vectorilor de poziţie orice endomorfism izometric cu determinantul matricei asociate egal cu +1 este o rotaţie în jurul unei drepte al cărei vector director este vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$. Există o bază ortonormată cu al treilea element egal cu versorul propriu în care matricea endomorfismului este

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Unghiul de rotaţie φ este dat de relaţia

$$2\cos\varphi + 1 = Tr(A).$$

Exemplul 3.4.6.2 *Considerăm endomorfismul definit pe spaţiul vectorilor liberi care pe baza ortonormată* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ *are matricea*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Se verifică imediat ca matricea A este ortogonală $AA^t = 1$. *Polinomul caracteristic este*

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1).$$

Se găsesc rădăcinile $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = 1$. *Valorii proprii* $\lambda_3 = 1$ *îi corespunde versorul propriu* $\overrightarrow{e_3'} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{e_3}$. *Endomorfismul reprezintă o rotaţie în jurul acestui versor de unghi* $\varphi = \frac{\pi}{3}$, *cum rezultă fie din relaţia* $2\cos\varphi + 1 = 2$ *fie din expresia rădăcinilor* $\lambda_{1,2}$. *Dacă în subspaţiul vectorilor perpendiculari pe* $\overrightarrow{e_3'}$ *alegem o bază ortonormată* $\overrightarrow{e_1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_2'} = \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{e_2} - \frac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{e_3}$ *obţinem baza spaţiului în care matricea endomorfismului este*

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea de trecere este matricea ortogonală

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Se verifică relaţia $A' = S^t A S$.

Din forma matricei endomorfismului izometric regăsim pe o altă cale că rotaţia de unghi φ în jurul versorului $\overrightarrow{u}$ este dată de relaţia

$$R_{\overrightarrow{u},\varphi}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}\cos\varphi + (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x})\sin\varphi + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{x})(1-\cos\varphi).$$

Dând lui φ valori particulare obţinem endomorfisme care au mai fost amintite.

Dacă un rigid se roteşte în jurul unei axe de versor $\overrightarrow{u}$ care trece prin origine unghiul de rotaţie este funcţie de timp $\varphi(t)$. Punctul care la momentul iniţial avea vectorul de poziţie $\overrightarrow{r}$ va avea la momentul t vectorul de poziţie

$$\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{r}\cos\varphi + (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{r})\sin\varphi + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{r})(1-\cos\varphi).$$

Poziţia punctului este determinată de trei parametri reali: doi parametri de la versorul $\overrightarrow{u}$ plus unghiul φ. Rezultă că viteza acestui punct este

$$\overrightarrow{v'} = [-\overrightarrow{r}\sin\varphi + (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{r})\cos\varphi + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{r})\sin\varphi]\,\frac{d\varphi}{dt}$$

sau

$$\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{r'}\frac{d\varphi}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}$$

unde am notat $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{u}\frac{d\varphi}{dt}$ vectorul numit *viteză de rotaţie.*

Vom deduce acum distribuţia vitezelor într-un rigid în mişcare. Dacă A, B, C sunt trei puncte ale rigidului la momentul $t = 0$, ele devin A', B', C' la momentul t asfel încât $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A'B'}|$, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{B'C'}|$, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{A'C'}|$. Există un endomorfism izometric care duce pe $\overrightarrow{AB}$ în $\overrightarrow{A'B'}$, etc. Dacă $S(t)$ este matricea ortogonală a acestui endomorfism vom avea matriceal cu notaţii evidente

$$X_{B'} - X_{A'} = S(t)(X_B - X_A).$$

Derivând avem

$$\dot{X}_{B'} - \dot{X}_{A'} = \dot{S}(t)(X_B - X_A) = \dot{S}(t)S(t)^t(X_{B'} - X_{A'}).$$

Matricea $\overset{\bullet}{S}(t)S(t)^t$ fiind antisimetrică, rezultă că există un vector $\overrightarrow{\omega}(t)$ astfel că avem

$$\overrightarrow{v_{B'}} = \overrightarrow{v_{A'}} + \overrightarrow{\omega}(t) \times \overrightarrow{A'B'}$$

adică vitezele punctelor unui rigid sunt cunoscute de îndată ce cunoaştem viteza unui punct $\overrightarrow{v_{A'}}$ şi vectorul $\overrightarrow{\omega}(t)$ numit *viteza unghiulară instantanee* a rigidului.

3.4.7 Exerciţii

1. Să se studieze endomorfismul definit pe un spaţiu euclidian bidimensional care într-o bază ortonormată are matricea $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

R. Endomorfismul este o rotaţie de unghi α dat de $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$.

2. Să se studieze endomorfismul definit pe un spaţiu euclidian tridimensional care într-o bază ortonormată are matricea $A = \begin{pmatrix} \frac{29}{45} & -\frac{20}{45} & \frac{28}{45} \\ \frac{28}{45} & \frac{35}{45} & -\frac{4}{45} \\ -\frac{20}{45} & \frac{20}{45} & \frac{35}{45} \end{pmatrix}$.

R. Endomorfismul este o rotaţie de unghi α dat de $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$ în jurul dreptei care trece prin origine de versor $\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{i} + \frac{2}{3}\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}\overrightarrow{k}$.

3. Să se studieze endomorfismul definit pe un spaţiu euclidian tridimensional care într-o bază ortonormată are matricea $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

R. Endomorfismul este o rotaţie de unghi $\alpha \in (0, \pi), \cos\alpha = \frac{-1}{3}$ în jurul dreptei care trece prin origine de versor $\overrightarrow{u} = \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{j}$.

4. Să se arate că dacă x este un vector dintr-un spaţiu euclidian cu baza ortonormată $e_1, e_2, \cdots, e_n$ există un endomorfism al lui Hausholder corespunzător unui versor u din subspaţiul $[e_k, e_{k+1}, \cdots e_n]$ astfel că $s_u(x) \in [e_1, e_2, \cdots, e_k]$. Această propoziţie dă posibilitatea triunghiularizării unei matrici prin înmulţirea la stânga cu un şir de matrici ortogonale şi simetrice.

3.4.8 Endomorfisme oarecare în spaţii euclidiene

Teorema 3.4.31 *Dacă f este un endomorfism al unui spaţiu euclidian atunci endomorfismul $f^* \circ f$ este un endomorfism autoadjunct ale cărui valori proprii sunt pozitive.*

In adevăr putem scrie $(f^* \circ f)^* = f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f$. Fie acum λ o valoare proprie a lui $f^* \circ f$ şi x un vector propriu corespunzător. Atunci

$$< (f^* \circ f)(x), x >=< f^*(f(x)), x >=< f(x), f(x) >= \lambda < x, x >$$

de unde $\lambda \geq 0$.

Din punct de vedere matriceal avem

Teorema 3.4.32 *Dacă A este o matrice pătratică atunci matricea $A^t A$ este o matrice simetrică cu toate valorile proprii pozitive.*

Teorema 3.4.33 *Dacă f este un endomorfism al unui spaţiu euclidian atunci există un endomorfism autoadjunct d asfel că $d^2 = f^* \circ f$.*

In adevăr, există o bază ortonormată în care $f^* \circ f$ are o matrice diagonală cu elementele de pe diagonală pozitive

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Atunci endomorfismul din teoremă este cel care în aceeaşi bază ortonormată are matricea

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Din punct de vedere matriceal avem

Teorema 3.4.34 *Pentru orice matrice pătratică A există o matrice pătratică simetrică B astfel încât $A = B^2$.*

Deşi teorema următoare este valabilă pentru orice endomorfism al unui spaţiu euclidian, o vom enunţa şi demonstra numai pentru endomorfisme bijective, aici demonstraţia fiind imediată şi acesta fiind şi cazul care prezintă importanţă practică.

Teorema 3.4.35 *(teorema de descompunere a unui endomorfism oarecare) Orice endomorfism inversabil este produsul între un endomorfism ortogonal şi un endomorfism autoadjunct în această ordine sau în ordine inversă.*

In adevăr dacă f este un endomorfism inversabil, $f^* \circ f$ este autoadjunct cu toate valorile proprii strict pozitive şi există endomorfismul autoadjunct inversabil d astfel că $d^2 = f^* \circ f$. Notăm $h = f \circ d^{-1}$. Avem

$$h \circ h^{-1} = f \circ d^{-1} \circ (f \circ d^{-1})^* = f \circ d^{-1} \circ d^{-1} \circ f^* = f \circ f^{-1} \circ f^{*-1} \circ f^* = i,$$

deci h este endomorfism ortogonal. Atunci $f = h \circ d$, c.c.t.d.

Teorema arată că orice endomorfism inversabil este compunerea între rotaţii, simetrii şi dilatări.

3.4.9 Deplasări în spaţii euclidiene

Definiţia 3.4.15 *Se numeşte deplasare în spaţiul euclidian V orice aplicaţie $d : V \to V$ cu proprietatea că pentru orice $x, y \in V$ are loc relaţia*

$$|d(y) - d(x)| = |y - x|.$$

Exemplul 3.4.9.1 *Dacă $a \in V$ este un element fixat atunci aplicaţia*

$$t_a(x) = a + x$$

este o deplasare numită translaţia de vector a.

Exemplul 3.4.9.2 *Orice endomorfism izometric $f : V \to V$ este şi o deplasare pe spaţiul euclidian V.*

Exemplul 3.4.9.3 *Dacă n este un versor în V şi $\alpha \in \mathbf{R}$ atunci aplicaţia*

$$s(x) = x + 2(\alpha - < x, n >)n$$

este o deplasare numită simetria faţă de hiperplanul de ecuaţie $< x, n > -\alpha = 0$.

Este evident că dacă d_1, d_2 sunt două deplasări pe spaţiul euclidian V atunci şi compunerea lor $d_2 \circ d_1$ este tot o deplasare pe V. In particular, compunerea dintre o translaţie şi un endomorfism ortogonal este o deplasare. Orice deplasare pe un spaţiu euclidian este de această formă.

Teorema 3.4.36 *(teorema de structura a unei deplasari) Dacă $d : V \to V$ este o deplasare a spaţiului euclidian V atunci există în mod unic un endomorfism ortogonal $f : V \to V$ şi o translaţie $t : V \to V$ astfel că $d = t \circ f$.*

In adevăr fie $a = d(0)$ şi notăm cu t translaţia de vector a. Notăm $f = t^{-1} \circ d$ şi trebuie să arătăm că f este un endomorfism izometric. In primul rând observăm că f este o deplasare cu $f(0) = 0$ care păstrează norma pentru că pentru orice $x \in V$

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x|.$$

De aici rezultă că f păstrează şi produsul scalar pentru că pentru orice $x, y \in V$

$$\begin{aligned} < & f(x), f(y) >= \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |f(y)|^2 - |f(x) - f(y)|^2\right) = \\ = & \frac{1}{2}\left(|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2\right) =< x, y > . \end{aligned}$$

A mai rămas de arătat că f este linear, adică pentru orice $x, y \in V$ şi pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y) = 0.$$

Este suficient să arătăm că vectorul din stânga egalităţii este ortogonal pe vectorii unei baze ortonormate a lui V. Fie $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ o bază ortonormată a lui V. Cum f păstrează produsul scalar rezultă că $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ este tot o bază ortonormată şi avem pentru $i = 1, 2, \cdots, n$

$$\begin{aligned} < & f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y), f(e_i) >= \\ = & < \alpha x + \beta y, e_i > -\alpha < x, e_i > -\beta < x, e_i >= 0. \end{aligned}$$

Deci f este un endomorfism izometric. Unicitatea perechii t, f rezultă din faptul că translaţia t trebuie să satisfacă condiţia $t(0) = (t \circ f)(0) = t(f(0)) = d(0)$ şi că $f = t^{-1} \circ d$.

Din demonstraţia făcută rezultă că pentru orice $x \in V$ are loc relaţia

$$d(x) = d(0) + f(x)$$

sau dacă notăm cu Y coloana coordonatelor lui $d(x)$ pe o bază ortonormată, cu Y_0 coloana coordonatelor lui $d(0)$, cu A matricea ortogonală a lui f şi cu X coloana coordonatelor lui x pe aceeaşi bază, avem

$$Y = Y_0 + AX.$$

Invers, orice aplicaţie a spaţiului euclidian pe el însuşi de această formă este o deplasare a spaţiului euclidian.

Teorema 3.4.37 *Oricărei deplasări d a unui spaţiu euclidian pe o bază dată ortonormată îi corespunde o matrice ortogonală A şi o coloană Y_0 astfel că vectorului x cu coloana coordonatelor X îi corespunde vectorul $y = d(x)$ cu coloana coordonatelor $Y = Y_0 + AX$.*

3.4.10 Forme lineare în spaţii euclidiene

Fie V un spaţiu euclidian n-dimensional, G matricea Gram pe baza $e_1, e_2, \cdots, e_n$ şi V^* dualul său, adică spaţiul formelor lineare definite pe V. Vom nota cu $e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*$ baza lui V^* duală bazei lui V cu $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Dacă x este un vector fixat din V, atunci produsul scalar $< x, y >$ este o formă lineară pe V. Se pune problema dacă pentru orice formă lineară l pe V găsim un vector x astfel că $l(y) =< x, y >$. Dacă notăm cu X, Y coloanele coordonatelor lui x, y, cu L linia formei l, vom putea scrie

$$l(y) = LY = X^t GY =< x, y >$$

de unde

$$L^t = GX$$

adică vectorul x este unic determinat.

Teorema 3.4.38 *Pentru orice formă lineară l pe spaţiul euclidian V există un vector x unic astfel că $l(y) =< x, y >$.*

Produsul scalar defineşte o aplicaţie lineară $\gamma : V \to V^*$, $\gamma(x) = l$, care în perechea de baze date are matricea G. Putem scrie

$$(\gamma(e_1), \gamma(e_2), \cdots, \gamma(e_n)) = (e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)G.$$

Matricea G fiind nesingulară, aplicaţia γ are inversă γ^{-1} tot lineară cu matricea G^{-1}. Aplicaţia γ este un izomorfism între spaţiul V şi dualul său V^*. Relaţia $l(y) =< x, y >$ se scrie $l(y) =< \gamma^{-1}(l), y >$. Elementele $f_i = \gamma^{-1}(e_i^*), i = 1, 2, \cdots, n$ constituie o altă bază a lui V. Avem

$$(f_1, f_2, \cdots, f_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)G^{-1}.$$

Putem defini produsul scalar a două forme lineare $l = \sum_{i=1}^{n} l_i e_i^*$, $m = \sum_{j=1}^{n} m_j e_j^*$ ca fiind

$$< l, m >=< \gamma^{-1}(l), \gamma^{-1}(m) >= \sum_{i,j=1}^{n} l_i m_j < f_i, f_j >$$

adică matricea Gram a produsului scalar pe V^* coincide cu matricea Gram H a bazei $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ a lui V. Vom observa mai întâi că bazele $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ sunt *biortogonale* adică

$$< e_i, f_j >= \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n, \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & pentru \quad j = i \\ 0 & pentru \quad j \neq i \end{cases}.$$

In adevăr, avem

$$(e_1, e_2, \cdots, e_n)^t (f_1, f_2, \cdots, f_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)^t (e_1, e_2, \cdots, e_n) G = G G^t = I.$$

Din acest motiv baza $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ se numeşte *baza reciprocă* a bazei $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Vom avea

$$H = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^t (f_1, f_2, \cdots, f_n) = G^{-1} G G^{-1} = G^{-1}.$$

Orice vector x din V se descompune unic după cele două baze

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n = \zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2 + \cdots + \zeta_n f_n.$$

Vom avea

$$\xi_i =< x, f_i >, \zeta_i =< x, e_i >, i = 1, 2, \cdots, n.$$

Dacă trecem de la baza $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la baza $(e_1', e_2', \cdots, e_n')$ cu ajutorul matricei de trecere S, adică

$$\begin{aligned} (e_1', e_2', \cdots, e_n') &= (e_1, e_2, \cdots, e_n) S, \\ (e_1, e_2, \cdots, e_n) &= (e_1', e_2', \cdots, e_n') T \end{aligned}$$

atunci matricea Gram devine

$$G' = S^t G S, \quad G = T^t G' T.$$

Atunci baza

$$(f_1, f_2, \cdots, f_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n) G^{-1}$$

devine

$$(f'_1, f'_2, \cdots, f'_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)STG^{-1}T^t = (f_1, f_2, \cdots, f_n)T^t$$

sau

$$(f'_1, f'_2, \cdots, f'_n)^t = T(f_1, f_2, \cdots, f_n)^t.$$

Deci coloana elementelor bazei reciproce se schimbă ca şi coloana X a componentelor vectorului x

$$\begin{aligned} x &= (e_1, e_2, \cdots, e_n)X = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)X', \\ X' &= TX, X = SX', \end{aligned}$$

adică contravariant. In ce priveşte componentele vectorului x pe bazele reciproce

$$x = (f_1, f_2, \cdots, f_n)Y = (f'_1, f'_2, \cdots, f'_n)Y'$$

rezultă

$$Y' = S^tY, Y = T^tY'$$

sau dacă trecem la liniile lor

$$Y'^t = Y^tS, Y^t = Y'^tT,$$

adică se schimbă ca şi liniile bazelor. Din acest motiv componentele $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ ale lui x se numesc *componentele contravariante*, iar componentele $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ ale aceluiaşi vector x se numesc *componentele covariante.*

3.4.11 Forme bilineare şi forme pătratice în spaţii euclidiene

Teorema 3.4.39 *Dacă $b : V \times V \to \mathbf{R}$ este o formă bilineară pe spaţiul euclidian V atunci există endomorfismele unice $f : V \to V, g : V \to V$ astfel încât pentru orice $x, y \in V$ are loc relaţia $b(x, y) =< x, f(y) >=< y, g(x) >$; endomorfismul g este adjunctul lui f.*

In adevăr, notând cu X, Y coloanele coordonatelor lui x, y, cu G matricea Gram, cu B, A, C matricele formei b şi ale endomorfismelor f, g, trebuie să avem

$$b(x, y) = X^tBY = X^tGAY = Y^tGCX = X^tC^tGY.$$

Cum X, Y sunt arbitrare, rezultă

$$B = GA = C^t G$$

adică

$$A = G^{-1}B, C = B^t G^{-1}, C = A^t.$$

Evident, endomorfismele determinate în mod unic satisfac condiţiile cerute.

După această teoremă există o bijecţie între formele bilineare şi endomorfismele spaţiului euclidian. Formelor bilineare simetrice le corespund endomorfisme autoadjuncte. Formei bilineare care coincide cu produsul scalar îi corespunde endomorfismul identitate $f(x) = x$.

Teorema 3.4.40 *Aplicaţia $p : V \to V$ este o formă pătratică pe spaţiul euclidian V dacă şi numai dacă există un endomorfism autoadjunct $f : V \to V$ astfel încât pentru orice $x \in V$ să avem $p(x) =< f(x), x >$. Intr-o bază ortonormată matricea endomorfismului f coincide cu matricea formei pătratice.*

Intr-o bază oarecare cu matricea Gram G, dacă P este matricea formei pătratice şi A matricea endomorfismului adjunct asociat ar trebui să avem

$$X^t P X = X^t G A X$$

adică $A = G^{-1}P$. Endomorfismul astfel determinat este autoadjunct pentru că

$$(G^{-1}PX)^t GY = X^t P G^{-1} G Y = X^t G G^{-1} P Y.$$

Notăm că vectorii proprii ai endomorfismului asociat sunt daţi de sistemul

$$(A - \lambda I)X = (G^{-1}P - \lambda G^{-1}G)X = G^{-1}(P - \lambda G)X = 0$$

sau

$$(P - \lambda G)X = 0.$$

Polinomul caracteristic va fi proporţional cu

$$Q(\lambda) = \det(P - \lambda G).$$

Conform teoremei de caracterizare a endomorfismelor autoadjuncte rezultă

Teorema 3.4.41 *Dacă $p : V \to V$ este o formă pătratică pe spaţiul euclidian V atunci există o bază ortonormată formată din vectori proprii ai endomorfismului asociat în care forma pătratică se reduce la forma canonică, coeficienţii pătratelor fiind valorile proprii ale endomorfismului asociat.*

Din punct de vedere matriceal dacă considerăm că matricea simetrică A este matricea unei forme pătratice într-un spaţiu euclidian într-o bază ortonormată regăsim

Teorema 3.4.42 *(teorema de structură a matricelor simetrice) Dacă A este o matrice simetrică atunci există o matrice ortogonală S astfel că $A' = S^t AS$ este diagonală.*

Dacă considerăm că matricea simetrică A este matricea unei forme pătratice într-un spaţiu euclidian într-o bază cu matricea Gram G avem

Teorema 3.4.43 *Dacă A este o matrice simetrică şi G o matrice simetrică pozitiv definită atunci există o matrice inversabilă S astfel că $S^t GS = I$ şi $S^t AS = \Lambda$ unde Λ este o matrice diagonală ale cărei elemente sunt rădăcinile polinomului caracteristic $Q(\lambda) = det(P - \lambda G) = 0$.*

Exemplul 3.4.11.1 *Intr-un spaţiu euclidian V pe baza ortonormată (e_1, e_2, e_3) se consideră forma pătratică astfel că lui $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$ îi corespunde numărul*

$$p(x) = \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1.$$

Matricea formei pătratice pe baza dată este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Se găseşte polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2})^2$$

şi deci există o bază ortonormată (e'_1, e'_2, e'_3) pe care forma pătratică se scrie

$$p(x) = \xi_1'^2 - \frac{1}{2}\xi_2'^2 - \frac{1}{2}\xi_3'^2.$$

Versorii bazei sunt vectorii proprii. Pentru $\lambda_1 = 1$ sistemul care dă vectorii proprii este

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 &= 0 \\ \frac{1}{2}\xi_1 - \xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

(a treia ecuaţie este consecinţă a celor două scrise) cu soluţia

$$\frac{\xi_1}{3} = \frac{\xi_2}{3} = \frac{\xi_3}{3}$$

şi putem lua versorul $e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$. Pentru $\lambda = -\frac{1}{2}$ sistemul care dă vectorii proprii se reduce la o singură ecuaţie

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$$

spaţiul vectorilor proprii fiind bidimensional. Luând $\xi_3 = 0, \xi_2 = -1$ avem $\xi_1 = 1$ şi găsim versorul propriu $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2$. Pe e_3' îl obţinem ca "produs vectorial" al primilor doi $e_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}e_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}e_3$. Rezultă că matricea de trecere este matricea ortogonală

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Legătura între coordonate este

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix}.$$

Din punct de vedere matriceal avem

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exemplul 3.4.11.2 *Să considerăm acum într-un spaţiu bidimensional în baza (e_1, e_2) formele pătratice care lui $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ fac să-i corespundă numerele*

$$\begin{aligned} q(x) &= 2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2, \\ p(x) &= 7\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 13\xi_2^2. \end{aligned}$$

Aceste forme pătratice au pe baza respectivă matricele

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Observăm că ambele matrice sunt pozitiv definite. Să găsim o bază (e_1', e_2') *pe care formele pătratice să se scrie sub forma*

$$q(x) = \xi_1'^2 + \xi_2'^2,$$
$$p(x) = \lambda_1 \xi_1'^2 + \lambda_2 \xi_2'^2.$$

Vom putea considera că matricea G *este matricea Gram a unui produs scalar pe spaţiul dat. Numerele* λ_1, λ_2 *sunt rădăcinile polinomului caracteristic*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda G) = \begin{vmatrix} 7 - 2\lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 13 - 3\lambda \end{vmatrix} = 5(\lambda^2 - 9\lambda + 18)$$

Găsim $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3$. *Vectorul* $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ *este vector propriu corespunzător lui* $\lambda_1 = 6$ *dacă*

$$\begin{pmatrix} 7 - 2.6 & 1 - 6 \\ 1 - 6 & 13 - 3.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0$$

adică dacă $\xi_1 + \xi_2 = 0$. *Mărimea vectorului propriu* $x = e_1 - e_2$ *este*

$$\sqrt{< x, x >} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{3}$$

şi deci putem lua versorul $e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}} e_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} e_2$. *La fel găsim că valorii proprii* $\lambda_2 = 3$ *îi corespunde versorul propriu* $e_2' = \frac{2}{\sqrt{5}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} e_2$. *Matricea de trecere este*

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}..$$

Pe noua bază ortonormată în produsul scalar considerat, matricea primei forme pătratice este

$$G' = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

iar a celei de-a doua forme pătratice este

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se verifică de-altfel că $S^t G S = I$ *şi* $S^t A S = A'$. *Subliniem că matricea de trecere nu este ortogonală..*

In aplicaţii practice legate de micile vibraţii ale unor sisteme în jurul poziţiilor de echilibru, matricea G este legată de energia cinetică a sistemului, iar matricea A este legată de energia potenţială a sistemului. Dacă X este coloana aşa numitelor coordonate generalizate atunci determinarea micilor vibraţii revine la rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale $GX'' + AX = 0$. Punând $X = SY$ şi înmulţind la stânga cu S^t obţinem $Y'' + A'Y = 0$ care se rezolvă simplu. Y reprezintă aşa numitele *coordonate sau moduri fundamentale.*

3.4.12 Exerciţii

1. Să se reducă la formă canonică formele pătratice date pe spaţii euclidiene în baze ortonormate prin

a) $p(x) = 5\xi_1^2 + 6\xi_2^2 + 7\xi_3^2 - 4\xi_1\xi_2 + 4\xi_2\xi_3$.

b) $p(x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 4\xi_3^2 + 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_1\xi_3 + 4\xi_2\xi_3$.

CAPITOLUL 4

CONICE ŞI CUADRICE

4.1 Conice

4.1.1 Ecuaţia generală a conicelor

Fie P un plan euclidian raportat la un sistem de coordonate rectangular Oxy cu versorii $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$.

Definiţia 4.1.1 *Se numeşte conică sau curbă de ordinul doi mulţimea C a punctelor $M(x,y)$ din plan ale căror coordonate satisfac o ecuaţie de forma*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

unde coeficienţii $a_{ij} = a_{ji}$ sunt reali.

Denumirea de conică se explică prin faptul că o asemenea curbă rezultă din intersecţia unui con circular drept (considerat cu cele două pânze ale sale) cu un plan şi deci poate fi: sau o elipsă sau o hiperbolă sau o parabolă sau o pereche de două drepte concurente sau paralele (când conul devine cilindru prin aruncarea vârfului la infinit). Scopul acestui paragraf este să demonstrăm acest lucru.

Dacă notăm vectorul de poziţie al punctului $M(x,y)$ prin $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ putem scrie ecuaţia conicei sub forma

$$p(\overrightarrow{r}) + 2l(\overrightarrow{r}) + a_{33} = 0$$

unde $p(\overrightarrow{r}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ este o formă pătratică, $l(\overrightarrow{r}) = a_{31}x + a_{32}y$ este o formă lineară, ambele definite pe mulţimea vectorilor de poziţie. Dacă notăm cu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, L = (a_{31}, a_{32}), X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

matricea formei pătratice pe baza $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, linia formei lineare respectiv coloana coordonatelor vectorului de poziţie putem scrie ecuaţia conicei sub forma matriceală

$$X^t AX + 2LX + a_{33} = 0.$$

Introducând o coordonată fictivă $z = 1$ putem scrie ecuaţia conicei sub forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

Introducând notaţiile

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & L^t \\ L & a_{33} \end{pmatrix}, \breve{X} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

se poate scrie membrul stâng al ecuaţiei conicei sub forma unei forme pătratice de cele trei variabile x, y, z

$$\breve{X}^t \breve{A} \breve{X} = 0.$$

Matricea $\breve{A}$ este matricea tuturor coeficienţilor ecuaţiei conicei.

Polinomul caracteristic al formei pătratice $p(\overrightarrow{r})$ este

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda Tr(A) + \det(A).$$

Polinomul caracteristic al formei pătratice $\breve{X}^t \breve{A} \breve{X}$ este

$$\breve{P}(\lambda) = \det(\breve{A} - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \lambda^2 Tr(\breve{A}) - \lambda(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + \det(\breve{A}).$$

Vom nota în continuare

$$\begin{aligned} I &= Tr(A), \delta = \det(A), \Delta = \det(\breve{A}), J = A_{11} + A_{22} + A_{33}, \\ f(x, y) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}. \end{aligned}$$

Vom arăta că valoarea expresiilor I, δ, Δ, J nu se schimbă la schimbarea sistemului de coordonate şi deci le vom numi invarianţi ai ecuaţiei conicei.

4.1.2 Modificarea ecuaţiei conicei la o translaţie a sistemului de coordonate

Dacă efectuăm o translaţie a sistemului de coordonate în punctul $O'(x_0, y_0)$ trecând de la sistemul Oxy la sistemul $O'x'y'$, baza $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ rămânând neschimbată, trecem de la coordonatele x, y la coordonatele x', y' prin relaţiile

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0 \end{aligned}$$

sau matricial

$$X = X' + X_0 \quad unde \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Inlocuind în ecuaţia conicei, se obţine o ecuaţie de aceeaşi formă

$$X'^t AX' + 2(L + X_o^t A)X' + X_0^t AX_0 + 2LX_0 + a_{33} = 0$$

cu matricea tuturor coeficienţilor

$$\breve{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} & a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} & f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

sau mai scurt

$$\breve{A}' = \begin{pmatrix} A & L + AX_0 \\ L + X_0^t A & f(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Forma pătratică nu-şi schimbă coeficienţii şi deci nu se schimbă nici expresiile I, δ. Dacă scriem relaţiile de schimbare a coordonatelor sub forma

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 z' \\ y &= y' + y_0 z' \\ z &= z'(= 1) \end{aligned}$$

sau matriceal

$$\breve{X} = S\,\breve{X}',$$

unde am notat

$$\breve{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \breve{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rezultă că matricea $\breve{A}'$ se scrie sub forma $\breve{A}' = S^t \breve{A} S$ de unde tragem concluzia că şi expresia Δ rămâne neschimbată pentru că noua sa valoare este $\Delta' = \Delta(\det(S))^2 = \Delta$..

Deci avem

Teorema 4.1.1 *La o translaţie a sistemului de coordonate ecuaţia conicei rămâne de aceeaşi formă şi rămân neschimbate expresiile I, δ, Δ.*

4.1.3 Centrul de simetrie al unei conice

Definiţia 4.1.2 *Se numeşte centru de simetrie al conicei C punctul M_0 cu proprietatea că dacă punctul M aparţine conicei atunci şi punctul M' simetricul lui M faţă de M_0 aparţine conicei.*

Simetricul lui $M(x, y)$ faţă de originea $O(0, 0)$ este $M'(-x, -y)$. Dacă odată cu M aparţine conicei şi punctul M' trebuie să avem

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_{13}x - 2a_{23}y + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

de unde prin scădere avem

$$a_{13}x + a_{23}y = 0.$$

Cum asta trebuie să se întâmple pentru orice punct $M(x, y)$ dacă originea $O(0, 0)$ este centru, rezultă că în mod necesar $a_{13} = a_{23} = 0$. Se vede imediat că aceste condiţii sunt suficiente pentru ca originea $O(0, 0)$ să fie centru. Făcând o translaţie în punctul $M_0(x_0, y_0)$ rezultă

Teorema 4.1.2 *Punctul $M_0(x_0, y_0)$ este centru de simetrie al conicei dacă şi numai dacă coordonatele sale satisfac sistemul de ecuaţii*

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Observăm că determinantul acestui sistem este tocmai expresia δ. Dacă $\delta \neq 0$ sistemul de mai sus are soluţie unică. Dacă $\delta = 0$ acest sistem are o infinitate de soluţii reprezentând puncte situate pe o dreaptă numai dacă $\Delta = 0$. Dacă $\delta = 0$ şi $\Delta \neq 0$ atunci sistemul nu are nicio soluţie. Deci are loc

Teorema 4.1.3 *Dacă $\delta \neq 0$ conica are un centru de simetrie unic ale cărui coordonate sunt soluţiile sistemului de mai sus. Dacă $\delta = 0$ şi $\Delta = 0$ conica are o infinitate de centre de simetrie situate pe dreapta de ecuaţie $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$. Dacă $\delta = 0$ şi $\Delta \neq 0$ conica nu are centru de simetrie.*

Cum membrul stâng al ecuaţiei conicei se scrie sub forma

$$f(x, y) = x(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + y(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}$$

rezultă că dacă se face o translaţie a sistemului de coordonate într-un centru $M_0(x_0, y_0)$, dispar termenii de gradul întâi în x, y şi termenul liber devine

$$a'_{33} = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}.$$

Dacă centrul conicei este unic, $\delta \neq 0$, atunci termenul liber este dat şi de relaţia

$$a'_{33} = \frac{\Delta}{\delta}$$

cum rezultă din invarianţa expresiei Δ. Din punct de vedere al calculuilui este preferabilă forma calculată cu linia a treia a matricei tuturor coeficienţilor.

4.1.4 Modificarea ecuaţiei conicei la o rotaţie a sistemului de coordonate

Dacă se trece de la sistemul de coordonate Oxy la sistemul $Ox'y'$ printr-o rotaţie a sistemului cu unghiul α se trece de la baza $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la baza $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$ dată de relaţiile

$$\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right) = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right) S.$$

Atunci se trece de la coordonatele x, y la coordonatele x', y' prin relaţiile

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = SX'$$

şi ecuaţia conicei devine

$$X'^t S^t A S X + 2LSX + a_{33} = 0$$

adică ecuaţia este de aceeaşi formă cu matricea tuturor coeficienţilor

$$\breve{A}' = \begin{pmatrix} S^t A S & S^t L^t \\ LS & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dacă scriem relaţiile de schimbare a coordonatelor sub forma

$$\breve{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \breve{S}\breve{X}', z = z' = 1$$

se poate scrie noua matrice tuturor coeficienţilor sub forma

$$\breve{A}' = \breve{S}^t \breve{A} \breve{S}.$$

Din expresiile noii matrice a tuturor coeficienţilor rezultă că şi de această dată expresiile I, δ, Δ rămân neschimbate. In plus şi expresia J rămâne neschimbată.

Teorema 4.1.4 *La o rotaţie a sistemului de coordonate, ecuaţia unei conice rămâne de aceeaşi formă şi rămân neschimbaţi invarianţii I, δ, Δ, J.*

4.1.5 Studiul conicelor cu centru unic

Fie o conică care în sistemul de coordonate Oxy are ecuaţia

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Presupunem că avem $\delta \neq 0$, deci există un centru de simetrie unic $O'(x_0, y_0)$ ale cărui coordonate sunt date de sistemul scris cu primele două linii ale matricei tuturor coeficienţilor

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Dacă facem o translaţie a sistemului de coordonate în centru, deci schimbăm coordonatele prin relaţiile

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0 \end{aligned}$$

ecuaţia conicei devine

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Reamintim că termenul liber este mai simplu de calculat prin relaţia

$$\frac{\Delta}{\delta} = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}.$$

Din teoria formelor pătratice rezultă că există un sistem de coordonate $O'XY$ în care ecuaţia conicei va fi de forma

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

sau

$$\frac{X^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}} + \frac{Y^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}} - 1 = 0,$$

unde λ_1, λ_2 sunt valorile proprii ale matricei A adică sunt rădăcinile polinomului caracteristic

$$P(\lambda) = \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0.$$

Cum

$$\lambda_1 + \lambda_2 = I, \lambda_1\lambda_2 = \delta$$

rezultă că avem următoarea clasificare a conicelor cu centru unic $\delta \neq 0$:

- $\delta > 0$ şi $\Delta = 0$ conica este o pereche de două drepte imaginare concurente în centrul real;
- $\delta > 0$ şi $\Delta \neq 0$ şi $\Delta I > 0$ conica este o elipsă imaginară;
- $\delta > 0$ şi $\Delta \neq 0$ şi $\Delta I < 0$ conica este o elipsă propriu zisă;
- $\delta < 0$ şi $\Delta = 0$ conica este o pereche de drepte reale concurente în centru;

- $\delta < 0$ şi $\Delta \neq 0$ conica este o hiperbolă propriu zisă.

Dacă notăm cu α unghiul cu care rotim sistemul $O'x'y'$ ca să obţinem sistemul $O'XY$, versorii noului sistem vor fi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{I} &= \overrightarrow{i}\cos\alpha + \overrightarrow{j}\sin\alpha\\ \overrightarrow{J} &= -\overrightarrow{i}\sin\alpha + \overrightarrow{j}\cos\alpha.\end{aligned}$$

Rezultă că vom avea

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= p(\overrightarrow{I}) = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha\\ \lambda_2 &= p(\overrightarrow{J}) = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\cos^2\alpha\\ 0 &= b(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}) = -a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}\cos\alpha\sin\alpha.\end{aligned}$$

Am notat prin b forma polară a formei pătratice p. Din ultima relaţie rezultă formula care dă unghiul de rotaţie

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Putem scriem

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_2 &= a_{11}\cos 2\alpha + 2a_{12}\sin 2\alpha - a_{22}\cos 2\alpha =\\ &= (a_{11} - a_{22})\cos 2\alpha + 2a_{12}\sin 2\alpha =\\ &= \frac{2a_{12}}{\sin 2\alpha}.\end{aligned}$$

Deci dacă alegem unghiul de rotaţie cel mai mic posibil $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci alegem rădăcinile polinomului caracteristic astfel că

$$\operatorname{sgn}(\lambda_1 - \lambda_2) = \operatorname{sgn}(a_{12}).$$

Exemplul 4.1.5.1 *Să se reprezinte grafic conica*

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0.$$

Matricea tuturor coeficienţilor este

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} 25 & -7 & 32\\ -7 & 25 & -32\\ 32 & -32 & -224 \end{pmatrix}.$$

Avem $I = 50, \delta = 625 - 49 = 576 > 0$ deci avem o conică gen elipsă cu centru unic. Coordonatele centrului sunt date de primele două linii

$$\begin{aligned} 25x_0 - 7y_0 + 32 &= 0 \\ -7x_0 + 25y_0 - 32 &= 0 \end{aligned}$$

adică centrul este $O'(-1,1)$. Calculăm $\frac{\Delta}{\delta} = -32 \cdot 1 - 32 \cdot 1 - 224 = -288$, adică $\Delta = 288 \cdot 576$. Cum $\Delta I > 0$, avem o elipsă propriu zisă. Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = \lambda^2 - 50\lambda - 576 = 0$ cu rădăcinile $\lambda_{1,2} = 18, 32$. Cum $\operatorname{sgn}(\lambda_1 - \lambda_2) = \operatorname{sgn}(-7) = -1$ rezultă că trebuie să luăm $\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 32$ şi deci ecuaţia elipsei după translaţia şi rotaţia axelor este

$$18X^2 + 32Y^2 - 288 = 0$$

sau

$$\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{9} - 1 = 0$$

adică avem o elipsă cu semiaxele $a = 4, b = 3$. Unghiul de rotaţie a axelor este dat de relaţia

$$\tan 2\alpha = \frac{-14}{25 - 25} = \infty$$

şi deci $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Vom avea $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi deci matricea de trecere de la baza iniţială $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la baza $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ este

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Formulele de schimbare la translaţie sunt

$$\begin{aligned} x &= x' - 1 \\ y &= y' + 1 \end{aligned}$$

iar la rotaţie

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{aligned}$$

adică formulele finale sunt

$$\begin{aligned} x &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{aligned}$$

sau pe dos

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1) \\ Y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1). \end{aligned}$$

Ecuaţiile axelor de simetrie fiind în noul sistem $Y = 0$ respectiv $X = 0$ rezultă a fi în sistemul iniţial

$$\begin{aligned} x - y + 2 &= 0 \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

In noul sistem ecuaţiile parametrice ale elipsei fiind

$$\begin{aligned} X &= 4\cos t \\ Y &= 3\sin t, t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

rezultă că în sistemul iniţial avem ecuaţiile parametrice

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2\sqrt{2}\cos t - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \\ y &= 1 + 2\sqrt{2}\cos t + 3\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Elipsa desenată cu MATHCAD este în figura de mai jos.

Exemplul 4.1.5.2 *Să se studieze conica*

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y + 64 = 0.$$

Matricea tuturor coeficienţilor este

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} 25 & -7 & 32 \\ -7 & 25 & -32 \\ 32 & -32 & 64 \end{pmatrix}.$$

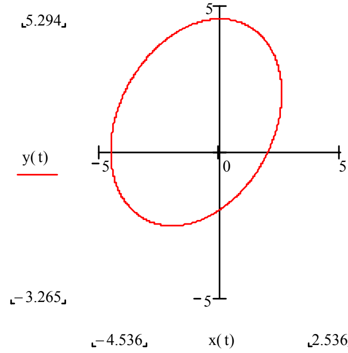


Fig. 4.1: Elipsa de la exemplul 1

Calculăm $I = 50, \delta = 625 - 49 = 576 > 0$ deci avem o conică gen elipsă cu centru unic. Coordonatele centrului sunt date de primele două linii

$$\begin{aligned} 25x_0 - 7y_0 + 32 &= 0 \\ -7x_0 + 25y_0 - 32 &= 0 \end{aligned}$$

adică centrul este $O'(-1,1)$. Calculăm $\frac{\Delta}{\delta} = -32 \cdot 1 - 32 \cdot 1 + 64 = 0$, adică $\Delta = 0$, deci avem de fapt o pereche de două drepte imaginare concurente în centru. Dacă ordonăm ecuaţia după y avem

$$25y^2 - 2y(7x + 32) + 25x^2 + 64x + 64 = 0.$$

Realizantul acestei ecuaţii este

$$(7x + 32)^2 - 25(25x^2 + 64x + 64) = -(576x^2 + 1152x + 576) = -24^2(x + 1)^2$$

şi avem

$$y = \frac{7x + 32 \pm 24i(x + 1)}{25}$$

adică două drepte imaginare conjugate concurente în $O'(-1,1)$.

Exemplul 4.1.5.3 *Să se reprezinte grafic conica*

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Matricea tuturor coeficienţilor este

$$\breve{A}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -1 & -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Calculăm $I = 6, \delta = -16 < 0$ deci avem o conică gen hiperbolă cu centru unic dat de sistemul

$$\begin{aligned} 3x_0 + 5y_0 - 1 &= 0 \\ 5x_0 + 3y_0 - 7 &= 0 \end{aligned}$$

şi găsim centrul $O'(2, -1)$. Calculăm $\frac{\Delta}{\delta} = -2+7-13 = -8$. Rădăcinile polinomului caracteristic $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$ sunt $\lambda_{1,2} = 8, -2$. Cum $a_{12} = 5 > 0$ alegem $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2$. După translaţia şi rotaţia sistemului de coordonate ecuaţia conicei este

$$8X^2 - 2Y^2 - 8 = 0$$

sau

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} - 1 = 0$$

adică avem o hiperbolă cu axa transversă $O'X$ cu semiaxele $a = 1, b = 2$. Unghiul de rotaţie a axelor este dat de relaţia

$$\tan 2\alpha = \frac{10}{3-3} = \infty$$

adică $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Avem $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi matricea de trecere de la baza iniţială $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la baza nouă $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ este

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Formulele de schimbare la translaţie sunt

$$\begin{aligned} x &= x' + 2 \\ y &= y' - 1 \end{aligned}$$

iar la rotaţie sunt

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{aligned}$$

adică formulele finale sunt

$$\begin{aligned} x &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{aligned}$$

sau pe dos

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x-2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y+1) \\ Y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y+1). \end{aligned}$$

In noul sistem ecuaţiile axelor de simetrie sunt $Y = 0, X = 0$, deci în vechiul sistem ecuaţiile lor sunt

$$\begin{aligned} x - y - 3 &= 0 \\ x + y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

In noul sistem ecuaţiile parametrice ale unei ramuri a hiperbolei sunt

$$\begin{aligned} X &= \cosh t \\ Y &= 2\sinh t, t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

şi pentru cealaltă ramură sunt

$$\begin{aligned} X &= -\cosh t \\ Y &= -2\sinh t, t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Deci în vechiul sistem ecuaţiile parametrice sunt pentru o ramură

$$\begin{aligned} x &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cosh t - \sqrt{2}\sinh t \\ y &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cosh t + \sqrt{2}\sinh t. \end{aligned}$$

şi pentru cealaltă ramură

$$\begin{aligned} x &= 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cosh t + \sqrt{2}\sinh t \\ y &= -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cosh t - \sqrt{2}\sinh t. \end{aligned}$$

In noul sistem ecuaţiile asimptotelor sunt $Y = \pm 2X$ şi obţinem ecuaţiile asimptotelor în vechiul sistem

$$\begin{aligned} y &= -3x+5 \\ y &= -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Desenată cu MATHCAD conica este în figura de mai jos.

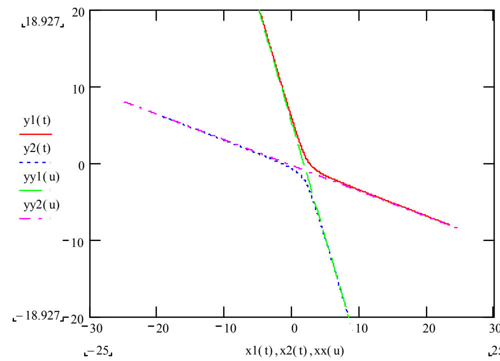


Fig. 4.2: Hiperbola de la exemplul 3

Exemplul 4.1.5.4 *Să se reprezinte grafic conica*

$$x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0.$$

Matricea tuturor coeficienţilor este

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 7 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Calculăm $I = 8, \delta = -9$, deci avem o conică gen hiperbolă. Centrul este dat de sistemul

$$\begin{aligned} x_0 - 4y_0 + 3 &= 0 \\ -4x_0 + 7y_0 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

deci centrul conicei este $O'(1,1)$. Calculăm $\frac{\Delta}{\delta} = 3 - 3 + 9 = 9$. Avem o hiperbolă propriu zisă. Rădăcinile polinomului caracteristic $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$ sunt $\lambda_{1,2} = -1, 9$.

Cum $a_{12} = -8 < 0$ alegem $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 9$ şi deci ecuaţia după translaţie şi rotaţie este

$$-X^2 + 9Y^2 + 9 = 0$$

sau

$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{1} - 1 = 0$$

adică avem o hiperbolă cu axa transversă $O'X$ cu semiaxele $a = 3, b = 1$. Unghiul de rotaţie a axelor este dat de

$$\tan 2\alpha = \frac{-8}{1-7} = \frac{4}{3},$$

deci $\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3}$. Din relaţia

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{3}$$

sau

$$2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2 = 0$$

găsim valoarea acceptabilă $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. Scriind

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{2} = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}$$

trebuie să alegem valorile acceptabile

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Rezultă matricea de trecere

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

şi deci formulele de schimbare a coordonatelor sunt

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}X - \frac{1}{\sqrt{5}}Y \\ y &= 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y \end{aligned}$$

sau pe dos

$$\begin{aligned} X &= \frac{2}{\sqrt{5}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{5}}(y-1) \\ Y &= -\frac{1}{\sqrt{5}}(x-1) + \frac{2}{\sqrt{5}}(y-1). \end{aligned}$$

Ecuaţiile axelor le putem obţine fie din ecuaţiile $Y = 0, X = 0$ fie direct ca ecuaţii ale dreptelor care trec prin centru şi au pantele $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ respectiv -$\frac{1}{\tan\alpha} = -2$

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{1}{2}(x-1) \quad sau \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \\ y-1 &= -2(x-1) \quad sau \quad y = -2x+3. \end{aligned}$$

Ecuaţiile parametrice sunt pentru o ramură

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{6}{\sqrt{5}}\cosh t - \frac{1}{\sqrt{5}}\sinh t \\ y &= 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\cosh t + \frac{2}{\sqrt{5}}\sinh t, t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{6}{\sqrt{5}}\cosh t + \frac{1}{\sqrt{5}}\sinh t \\ y &= 1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\cosh t - \frac{2}{\sqrt{5}}\sinh t, t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

pentru cealaltă ramură.

Graficul făcut cu MATHCAD este în figura de mai jos.

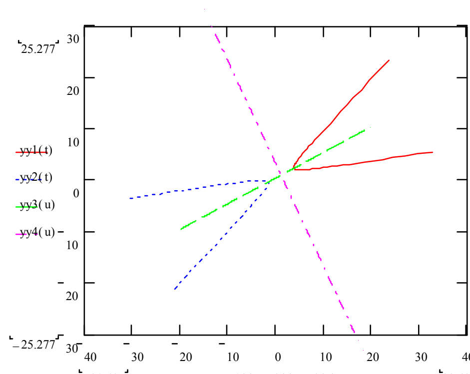


Fig. 4.3: Hiperbola de la exemplul 4

Exemplul 4.1.5.5 *Să se studieze conica*

$$x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y = 0.$$

Scriem matricea tuturor coeficienţilor

$$\breve{A}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 7 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculăm $I = 8, \delta = -9$, *avem o conică gen hiperbolă. Centrul dat de ecuaţiile*

$$\begin{aligned} x_0 - 4y_0 + 3 &= 0 \\ -4x_0 + 7y_0 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

este $O'(1,1)$. *Calculăm* $\frac{\Delta}{\delta} = 3 - 3 = 0$, *deci* $\Delta = 0$ *adică avem o pereche de două drepte concurente în centru. Ordonăm ecuaţia după* y

$$7y^2 - 2y(4x+3) + x^2 + 6x = 0.$$

Realizantul acestei ecuaţii este sigur un pătrat perfect

$$(4x+3)^2 - 7x^2 - 42x = 9x^2 - 18x + 9 = (3x-3)^2$$

şi deci avem ecuaţiile celor două drepte

$$\begin{aligned} y &= \frac{4x+3+3x-3}{7} \quad \textit{sau} \quad y = x \\ y &= \frac{4x+3-3x+3}{7} \quad \textit{sau} \quad y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

4.1.6 Studiul conicelor cu o infinitate de centre sau fără centru

In sistemul de coordonate Oxy fie conica de ecuaţie

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Presupunem că suntem în cazul $\delta = 0$. Dacă $a_{11} = 0$ atunci şi $a_{12} = 0$ şi ecuaţia conicei este de forma

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Dacă $a_{11} \neq 0$ polinomul caracteristic al formei pătratice cu matricea A este $P(\lambda) = \lambda^2 - I\lambda$. Alegem $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = I$. Asta înseamnă că există un unghi α astfel că rotind sistemul Oxy cu unghiul α obţinem sistemul $Ox'y'$ în care ecuaţia conicei se scrie

$$Iy'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

cu matricea tuturor coeficienţilor

$$\breve{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & I & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Avem $\Delta = -Ia'^2_{13}$. Dacă $\Delta = 0$ atunci şi numai atunci $a'_{13} = 0$. In acest caz ecuaţia conicei se reduce la

$$Iy'^2 + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

care se poate descompune în două ecuaţii a două drepte paralele. La rotaţia sistemului aveam invariantul $J = A_{11} + A_{22} + A_{33} = Ia'_{33} - a'^2_{23}$. Realizantul ecuaţiei în y' este tocmai $-J$.

Deci dacă $\delta = 0$ şi $\Delta = 0$ atunci distingem trei cazuri:

- $J < 0$ conica este formată din două drepte paralele reale;
- $J = 0$ conica este formată din două drepte confundate;
- $J > 0$ conica este formată din două drepte paralele imaginare.

Dacă $\delta = 0$ şi $\Delta \neq 0$ atunci $a'_{13} \neq 0$ şi ecuaţia conicei se poate scrie

$$I(y' + \frac{a'_{23}}{I})^2 + 2a'_{13}(x' + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}} - \frac{a'^2_{23}}{2Ia'_{13}}) = 0.$$

Dacă notăm

$$\begin{aligned} X &= x' + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}} - \frac{a'^2_{23}}{2Ia'_{13}} \\ Y &= y' + \frac{a'_{23}}{I} \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă o translaţie a sistemului de coordonate, ecuaţia conicei se scrie

$$Y^2 = 2pX$$

unde $2p = -\frac{2a'_{13}}{I}$. Conica este în acest caz o parabolă cu parametrul p.

Vom nota că

$$p^2 = -\frac{\Delta}{I^3}.$$

Vectorul $\overrightarrow{i'} = \overrightarrow{i}\cos\alpha + \overrightarrow{j}\sin\alpha$ este vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 0$ pentru matricea A şi deci avem

$$a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0$$

şi deci unghiul de rotaţie α este dat de relaţia

$$\tan\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}}.$$

Putem scrie

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_{11}}{-a_{12}} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{a_{11}} = \frac{\cos\alpha}{-a_{12}} = \frac{1}{\pm\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{a_{11}I}}.$$

In ipoteza că $a_{11} > 0$ şi că alegem cel mai mic unghi de rotaţie posibil $0 < \alpha < \pi$, $\sin\alpha > 0$ vom avea

$$\sin\alpha = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}I}}, \quad \cos\alpha = \frac{-a_{12}}{\sqrt{a_{11}I}}.$$

Atunci

$$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha = \frac{-a_{12}a_{13} + a_{23}a_{11}}{\sqrt{a_{11}I}} = \frac{-A_{23}}{\sqrt{a_{11}I}}.$$

Dacă ne întoarcem la expresia parametrului parabolei avem

$$p = \frac{-a'_{13}}{I} = \frac{A_{23}}{I\sqrt{a_{11}I}}$$

adică $\text{sgn}(p) = \text{sgn}(A_{23})$. Prin A_{ij} am notat complementul algebric al elementului a_{ij} în matricea tuturor coeficienţilor.

Avem

$$a'_{23} = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha = -\frac{a_{13}a_{11} + a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{11}I}}.$$

Ecuaţia axei parabolei este

$$Y + \frac{a'_{23}}{I} = 0$$

sau ţinând cont că

$$Y = -x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{-xa_{11} - ya_{12}}{\sqrt{a_{11}I}}$$

găsim ecuaţia axei în coordonatele iniţiale

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{13}a_{11} + a_{12}a_{23}}{I} = 0.$$

La fel se găseşte că ecuaţia tangentei în vârful parabolei este

$$2(A_{31}x + A_{32}y) - J + \frac{\Delta}{I} = 0$$

şi că vectorul $A_{31}\overrightarrow{i} + A_{32}\overrightarrow{j}$ este dirijat spre interiorul concavităţii parabolei.

In loc de a ţine minte formulele de mai sus se poate proceda şi astfel:

După ce s-a stabilit că avem de-a face cu o parabolă se scrie ecuaţia parabolei după înmulţirea cu $a_{11} \neq 0$ sub forma

$$(a_{11}x + a_{12}y + \lambda)^2 - 2\lambda a_{11}x - 2\lambda a_{12}y - \lambda^2 + 2a_{11}a_{13}x + 2a_{11}a_{23}y + a_{11}a_{33} = 0$$

sau ordonând ultimii termeni

$$(a_{11}x + a_{12}y + \lambda)^2 - [2x(\lambda a_{11} - a_{11}a_{13}) + 2y(\lambda a_{12} - a_{11}a_{23}) - a_{11}a_{33}] = 0.$$

Se determină λ din condiţia ca dreptele de ecuaţii

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + \lambda &= 0 \\ 2x(\lambda a_{11} - a_{11}a_{13}) + 2y(\lambda a_{12} - a_{11}a_{23}) - a_{11}a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

să fie perpendiculare, adică

$$a_{11}(\lambda a_{11} - a_{11}a_{13}) + a_{12}(\lambda a_{12} - a_{11}a_{23}) = 0.$$

Prima dreaptă de mai sus este axa de simetrie. iar a doua este tangenta în vârful parabolei. Semnul parametrului p se poate stabili din intersecţiile parabolei cu axele de coordonate ale sistemului iniţial.

Exemplul 4.1.6.1 *Să se studieze conica*

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8y + 4 = 0.$$

Matricea tuturor coeficienţilor este

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculăm $I = 2, \delta = 0, \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -16, A_{23} = 4$. Deci avem o parabolă cu parametrul $p = \frac{A_{23}}{I\sqrt{a_{11}I}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Ecuaţia ei după rotaţia şi translaţia sistemului de coordonate este

$$Y^2 = 2\sqrt{2}X.$$

Ecuaţia axei de simetrie este

$$x + y + \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot (-4)}{2} = 0 \quad sau \quad x + y - 2 = 0.$$

Cum $A_{13} = -4, A_{23} = 4, J = A_{11} + A_{22} = -12 + 4 = -8$ rezultă că tangenta în vârf are ecuaţia

$$2(-4x + 4y) + 8 - 8 = 0 \quad sau \quad x - y = 0.$$

Găsim vârful parabolei rezolvând sistemul

$$\begin{aligned} x + y - 2 &= 0, \\ x - y &= 0, \end{aligned}$$

adică $V(1, 1)$. Unghiul de rotaţie dat de $\tan\alpha = -1$ deci $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Vectorul $-4\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ este dirijat în interiorul concavităţii parabolei. Matricea de trecere este

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

şi deci formulele de schimbare a coordonatelor sunt

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{aligned}$$

sau pe dos

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1) \\ Y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1). \end{aligned}$$

Ecuaţiile parametrice în noul sistem fiind

$$\begin{aligned} X &= t \\ Y &= \pm\sqrt{2\sqrt{2}t} \end{aligned}$$

vom avea ecuaţiile parametrice în vechiul sistem

$$\begin{aligned} x &= 1-\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sqrt{2}t} \\ y &= 1+\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sqrt{2}t}, t\geq 0 \end{aligned}$$

pentru o ramură şi

$$\begin{aligned} x &= 1-\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sqrt{2}t} \\ y &= 1+\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sqrt{2}t}, t\geq 0 \end{aligned}$$

pentru cealaltă ramură.

Graficul parabolei facut cu MATHCAD este în figura de mai jos.

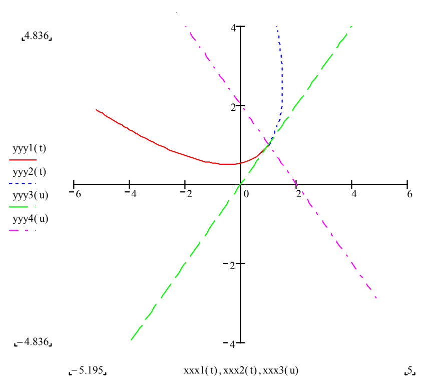


Fig. 4.4: Parabola de la exemplul 6

Exemplul 4.1.6.2 *Fie conica*

$$x^2-2xy+y^2-2x+2y=0.$$

Matricea tuturor coeficienţilor este

$$\breve{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculăm $I=2, \delta=0, \Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=0$. $J=-1-1=-2$ *deci conica constă în două drepte paralele. Dacă ordonăm ecuaţia după* y *avem*

$$y^2-2y(x-1)+x^2-2x=0.$$

Realizantul este $(x-1)^2 - x^2 + 2x = 1$. *Avem*

$$y = x - 1 \pm 1$$

adică avem dreptele paralele

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= x - 2. \end{aligned}$$

4.2 Generarea unor suprafeţe

4.2.1 Suprafeţe cilindrice

Definiţia 4.2.1 *Se numeşte suprafaţă cilindrică sau pe scurt cilindru suprafaţa generată de o dreaptă care se deplasează într-o mişcare de translaţie rămânând paralelă cu o direcţie dată sprijinindu-se pe o curbă fixă numită curba directoare. Dreapta care se deplasează se numeşte generatoarea suprafeţei cilindrice.*

Direcţia fixă a generatoarelor poate fi dată ca dreapta D de intersecţie a două plane

$$\begin{aligned} P_1(x,y,z) &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2(x,y,z) &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}$$

Curba directoare CD poate fi dată ca intersecţie a două suprafeţe

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= 0 \\ f_2(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

O generatoare fiind paralelă cu dreapta D este intersecţia a două plane paralele cu planele care se intersectează după dreapta D; deci o generatoare are ecuaţiile

$$\begin{aligned} P_1(x,y,z) &= \lambda \\ P_2(x,y,z) &= \mu \end{aligned}$$

cu parametrii reali λ, μ caracteristici fiecărei generatoare. Cum generatoarea se sprijină pe curba generatoare CD, sistemul de patru ecuaţii cu trei necunoscute

$$P_1(x,y,z) = \lambda$$

$$P_2(x,y,z) = \mu$$
$$f_1(x,y,z) = 0$$
$$f_2(x,y,z) = 0$$

are o soluţie, coordonatele $x(\lambda,\mu), y(\lambda,\mu), z(\lambda,\mu)$ punctului de sprijin. Ca sistemul să fie compatibil este necesară şi suficientă o condiţie de forma

$$F(\lambda,\mu) = 0.$$

Dar parametrii λ, μ ai unei generatoare se pot exprima în funcţie de coordonatele (x,y,z) ale unui punct de pe generatoare prin relaţiile

$$\lambda = P_1(x,y,z)$$
$$\mu = P_2(x,y,z).$$

Inseamnă că orice punct de pe generatoare, adică de pe suprafaţa cilindrică va verifica ecuaţia

$$F(P_1(x,y,z), P_2(x,y,z)) = 0.$$

Invers, dacă coordonatele unui punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ verifică această ecuaţie, atunci notând

$$\lambda_0 = P_1(x_0,y_0,z_0)$$
$$\mu_0 = P_2(x_0,y_0,z_0)$$

rezultă că dreapta de ecuaţii

$$P_1(x,y,z) = \lambda_0$$
$$P_2(x,y,z) = \mu_0$$

conţine punctul M_0 şi se sprijină pe curba directoare CD, adică punctul M_0 aparţine suprafeţei cilindrice. Deci putem spune că ecuaţia

$$F(P_1(x,y,z), P_2(x,y,z)) = 0.$$

este ecuaţia suprafeţei cilindrice. Caracteristica acestei ecuaţii este că ea exprimă o legătură între membrii stângi ai ecuaţiilor a două plane $P_1(x,y,z), P_2(x,y,z)$. Aceştia egalaţi cu zero dau o dreaptă cu care sunt paralele generatoarele suprafeţei cilindrice.

Exemplul 4.2.1.1 *Suprafaţa cu ecuaţia*

$$(x-y)^2+(y-z)^2-1=0$$

este o suprafaţă cilindrică ale cărei generatoare sunt paralele cu dreapta de ecuaţii

$$\begin{aligned} x-y &= 0 \\ y-z &= 0. \end{aligned}$$

Putem găsi o curbă directoare a sa din planul xOy făcând $z=0$ în ecuaţia suprafeţei

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ x^2-2xy+2y^2-1 &= 0. \end{aligned}$$

Dacă suprafaţa cilindrică are generatoarele paralele cu axa Oz şi are drept curbă directoare curba din planul xOy cu ecuaţia în acest plan

$$f(x,y)=0$$

atunci generatoarele vor fi

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \mu \end{aligned}$$

condiţia ca generatoarea să se sprijine pe curba directoare este ca sistemul

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \mu \\ f(x,y) &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

să fie compatibil. Condiţia de compatibilitate este $f(\lambda,\mu)=0$ şi găsim ecuaţia suprafeţei cilindrice

$$f(x,y)=0.$$

Deci orice ecuaţie $f(x,y)=0$ este în spaţiu ecuaţia unei suprafeţe cilindrice cu generatoarele paralele cu Oz a cărei curbă directoare din planul xOy are în acest plan aceeaşi ecuaţie. Astfel

- $x^2 + y^2 - 1 = 0$ este ecuaţia unui cilindru circular cu generatoarele parale cu Oz şi care are curba directoare în planul xOy cercul cu aceeaşi ecuaţie;
- $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ este ecuaţia unui cilindru de ordinul doi eliptic (hiperbolic) cu generatoarele paralele cu Oz şi care are curbă directoare în planul xOy elipsa (hiperbola) cu aceiaşi ecuaţie; această ecuaţie se numeşte ecuaţia canonică a cilindrului de ordinul doi eliptic (hiperbolic).
- $y^2 - 2px = 0$ este ecuaţia unui cilindru de ordinul doi parabolic cu generatoarele paralele cu Oz; această ecuaţie se numeşte ecuaţia canonică a cilindrului de ordinul doi parabolic.

4.2.2 Exerciţii

1. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice ale cărei generatoare sunt paralele cu direcţia $(1,1,1)$ şi care are curba directoare cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 - 1 = 0$ din planul xOy .

R. $(x - z)^2 + (y - z)^2 - 1 = 0.$

2. Să se găsească proiecţia pe planul xOy a cercului de ecuaţii $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, x + y + z = 0.$

R. Intre cele două ecuaţii se elimină variabila $z : 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 1 = 0.$

4.2.3 Suprafeţe conice

Definiţia 4.2.2 *Se numeşte suprafaţă conică sau pe scurt con suprafaţa generată de o dreaptă care se deplasează trecând printr-un punct fix numit vârful suprafeţei conice şi sprijinindu-se pe o curbă fixă numită curba directoare a suprafeţei conice.*

Fie $V(x_0, y_0, z_0)$ vârful suprafeţei conice şi curba directoare CD de ecuaţii

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= 0 \\ f_2(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

O generatoare fiind o dreaptă care trece prin vârf, este caracterizată de doi parametri λ, μ

$$x - x_0 = \lambda(z - z_0)$$

$$y - y_0 = \mu(z - z_0).$$

Generatoarea se sprijină pe curba directoare dacă şi numai dacă sistemul de patru ecuaţii cu trei necunoscute

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \lambda(z - z_0) \\ y - y_0 &= \mu(z - z_0) \\ f_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

este compatibil, adică dacă are loc o condiţie de forma

$$F(\lambda, \mu) = 0.$$

Ca şi la suprafeţele cilindrice găsim că ecuaţia suprafeţei conice este

$$F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

Definiţia 4.2.3 *O funcţie de trei variabile $\varphi(u, v, w)$ se numeşte funcţie omogenă de gradul m în variabilele u, v, w dacă pentru orice $t \in \mathbf{R}$ are loc relaţia*

$$\varphi(tu, tv, tw) = t^m \varphi(u, v, w).$$

O proprietate imediată a funcţiilor omogene de gradul m obţinem punând în această relaţie $t = \frac{1}{w}$; găsim

$$\varphi(u, v, w) = w^m \varphi\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}, 1\right) = w^m \varphi_0(u, v)$$

funcţia $\varphi_0(u, v)$ fiind omogenă de gradul zero. Deci orice funcţie omogenă de gradul m este produsul dintre puterea m-a a unei variabile şi o funcţie omogenă de gradul zero.

Cu aceste definiţii constatăm că ecuaţia unei suprafeţe conice se caracterizează prin faptul că membrul stâng al ecuaţiei este o funcţie omogenă în $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, (x_0, y_0, z_0) fiind coordonatele vârfului.

Exemplul 4.2.3.1 *Putem spune că ecuaţia*

$$xy + yz + zx = 0$$

este ecuaţia unei suprafeţe conice cu vârful în originea sistemului de coordonate $O(0,0,0)$. *Vom obţine o curbă directoare dacă facem de exemplu* $z=1$:

$$\begin{aligned} z &= 1 \\ xy+y+x &= 0 \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} z &= 1 \\ (y+1)(x+1)-1 &= 0 \end{aligned}$$

adică intersecţia dintre un cilindru hiperbolic cu generatoarele paralele cu Oz *cu planul* $z=1$. *Deci curba este hiperbola din planul* $z=1$ *care se proiectează paralel cu* Oz *pe planul* xOy *după hiperbola cu ecuaţia a doua.*

4.2.4 Suprafeţe de rotaţie

Definiţia 4.2.4 *Se numeşte suprafaţă de rotaţie suprafaţa generată de o curbă care se roteşte în jurul unei drepte fixe numită axa de rotaţie a suprafeţei de rotaţie. Când curba care se roteşte este coplanară cu axa de rotaţie ea se numeşte curbă meridian a suprafeţei de rotaţie.*

Axa de rotaţie se poate da printr-un punct al său $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi prin direcţia sa (l,m,n). Fie

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= 0 \\ f_2(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

ecuaţiile curbei care se roteşte. Suprafaţa de rotaţie poate fi considerată generată de cercul de intersecţie dintre ea şi un plan perpendicular pe axa de rotaţie. Acest cerc se numeşte *cerc paralel al suprafeţei de rotaţie.*

Cercul paralel poate fi considerat ca intersecţie între o sferă cu centrul în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de rază variabilă $\sqrt{\lambda}$ şi un plan perpendicular pe axa de rotaţie

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 &= \lambda \\ lx+my+nz &= \mu. \end{aligned}$$

Cercul paralel se sprijină pe curba care se roteşte dacă şi numai dacă sistemul de patru ecuaţii cu trei necunoscute

$$\begin{aligned}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 &= \lambda\\ lx+my+nz &= \mu\\ f_1(x,y,z) &= 0\\ f_2(x,y,z) &= 0\end{aligned}$$

este compatibil, adică dacă şi numai dacă este satisfăcută o condiţie de forma

$$F(\lambda,\mu)=0.$$

Ca şi mai înainte rezultă că ecuaţia suprafeţei de rotaţie este

$$F\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2, lx+my+nz\right)=0.$$

Recunoaştem în această ecuaţie o legătură între membrul stâng al ecuaţiei unei sfere şi membrul stâng al ecuaţiei unui plan. Normala la plan este direcţia axei de rotaţie şi centrul sferei este un punct prin care trece axa de rotaţie.

In cazul în care axa de rotaţie este axa Oz şi curba care se roteşte este o curbă meridian din planul yOz de ecuaţii

$$\begin{aligned}x &= 0\\ f(y,z) &= 0\end{aligned}$$

atunci cercul paralel poate fi considerat ca intersecţie între sfera cu centrul în origine de rază $\sqrt{\lambda}$ şi un plan pependicular pe Oz

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2 &= \lambda\\ z &= \mu.\end{aligned}$$

Sistemul care exprimă că cercul paralel se sprijină pe curba meridian

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2 &= \lambda\\ z &= \mu\\ x &= 0\\ f(y,z) &= 0\end{aligned}$$

are soluţia

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \pm\sqrt{\lambda - \mu^2} \\ z &= \mu \end{aligned}$$

şi este compatibil dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia

$$f(\pm\sqrt{\lambda - \mu^2}, \mu) = 0.$$

Găsim ecuaţia suprafeţei de rotaţie

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

adică în ecuaţia din planul yOz a curbei meridian $f(y, z) = 0$ în loc de y punem $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemplul 4.2.4.1 *Ecuaţia* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ *este ecuaţia unui con cu vârful în origine fiind omogenă de gradul doi în* x, y, z *şi este totodată ecuaţia unui con de rotaţie în jurul lui* Oz *şi anume obţinut prin rotaţia în jurul lui* Oz *a curbei de ecuaţie* $y^2 - z^2 = 0$ *din planul* yOz, *adică a dreptelor* $y = \pm z$ *deci bisectoarele unghiurilor axelor de coordonate.*

4.3 Cuadrice

4.3.1 Principiul stabilirii formei geometrice a unei suprafeţe

Fie S o suprafaţă, să notăm prin $F(x, y, z)$ membrul stâng al ecuaţiei suprafeţei şi deci să scriem ecuaţia ei sub forma

$$F(x, y, z) = 0.$$

Fie un plan P de ecuaţie

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Să presupunem că acest plan intersectează axa Oz, deci $C \neq 0$ şi putem scrie ecuaţia planului sub forma

$$z = Px + Qy + \mathbf{R}.$$

Intersecţia între suprafaţa S şi planul P este determinată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ z &= Px + Qy + \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Introducând valoarea lui z din a doua ecuaţie în prima, obţinem

$$F(x,y,Px+Qy+\mathbf{R}) = 0.$$

Aceasta este ecuaţia unei suprafeţe cilindrice cu generatoarele paralele cu Oz şi care are drept curbă directoare curba din planul Oxy cu aceeaşi ecuaţie. Dacă punctul $M'(x_0,y_0)$ satisface ultima ecuaţie atunci punctul $M(x_0,y_0,z_0)$ cu $z_0 = Px_0 + Qy_0 + \mathbf{R}$ se află pe intersecţia dintre suprafaţa S şi planul P. Cum punctul M' este proiecţia ortogonală a punctului M pe planul Oxy rezultă că ecuaţia

$$F(x,y,Px+Qy+\mathbf{R}) = 0$$

este ecuaţia proiecţiei ortogonale pe planul Oxy a intersecţiei dintre suprafaţa S şi planul P.

Dacă planul P are ecuaţia

$$z = h$$

atunci planul P este paralel cu planul Oxy şi intersecţia dintre S şi P se proiectează pe Oxy după o curbă congruentă cu aceasta, adică după o curbă care diferă numai prin poziţia în spaţiu. Dacă vom da lui h diferite valori $h_1, h_2, \cdots$, vom obţine proiecţiile ortogonale pe Oxy ale acestor intersecţii

$$F(x,y,h_1) = 0, F(x,y,h_2) = 0, \cdots$$

Construind în planul Oxy aceste proiecţii obţinem o hartă a secţiunilor orizontale ale suprafeţei. Din această hartă ne putem forma o imagine a suprafeţei date exact în modul în care din liniile de nivel constant de pe o hartă ne formăm o imagine despre un anumit relief.

4.3.2 Elipsoidul

Definiţia 4.3.1 *Se numeşte elipsoid suprafaţa care într-un anumit sistem de coordonate*

rectangular are o ecuaţie de forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

unde a, b, c sunt constante reale strict pozitive. Această ecuaţie se numeşte ecuaţia canonică a elipsoidului.

Observăm că elipsoidul este o suprafaţă simetrică în raport cu planele de coordonate, în raport cu axele de coordonate şi cu originea sistemului de coordonate pentru că odată cu punctul $M(x, y, z)$ el conţine şi punctele $M_1(-x, y, z)$, $M_2(x, -y, z)$, $M_3(x, y, -z)$, $M_4(x, -y, -z)$, $M_5(-x, y, -z)$, $M_6(-x, -y, z)$, $M_7(-x, -y, z)$.

Din ecuaţia elipsoidului deducem că el este o suprafaţă mărginită conţinută în interiorul paralelipipedului

$$|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c.$$

Intersecţiile elipsoidului cu planele

$$z = h$$

au proiecţiile pe planul Oxy de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, |h| \leq c,$$

sau

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0$$

adică sunt elipse cu semiaxele

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, b' = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

Cea mai mare elipsă este cea din planul Oxy, elipsele fiind din ce în ce mai mici pe măsură ce $|h|$ creşte, ajungând să degenereze în câte un punct pentru $h = \pm c$. Punctele $C(0, 0, c)$, $C'(0, 0, -c)$ se numesc *vârfurile elipsoidului*.

Obţinem rezultate analoage la intersecţia elipsoidului cu plane de ecuaţii $x = l$, $y = m$ paralele cu planele Oyz respectiv Oxz.

Mărimile a, b, c se numesc *semiaxele elipsoidului*. Dacă două din acestea sunt egale, de exemplu $a = b$ ecuaţia elipsoidului este

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

adică avem un elipsoid de rotaţie obţinut prin rotaţia în jurul axei Oz a curbei meridian din planul Oyz

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, x = 0.$$

Dacă toate semiaxele sunt egale $a = b = c$ atunci elipsoidul este o sferă.

4.3.3 Conul de ordinul doi

Definiţia 4.3.2 *Se numeşte con de ordinul doi suprafaţa care într-un anumit sistem de coordonate rectangular are o ecuaţie de forma*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

unde a, b, c sunt numere reale strict pozitive. Această ecuaţie se numeşte ecuaţia canonică a conului de ordinul doi.

Din cele spuse la suprafeţele conice deducem că vârful conului de ordinul doi este originea sistemului de coordonate.

Din ecuaţie deducem că avem simetrie în raport cu planele de coordonate, cu axele de coordonate şi în raport cu originea sistemului de coordonate.

Intersecţiile cu planele $z = h$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, z = h$$

sau

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0, z = h$$

sunt elipse ale căror semiaxe

$$a' = a\frac{|h|}{c}, b' = b\frac{|h|}{c}$$

cresc pe măsură ce $|h|$ creşte nemărginit. Oricare din aceste elipse poate fi considerată curbă directoare a conului de ordinul doi. Deducem că un con de ordinul doi este o suprafaţă nemărginită în orice direcţie.

Dacă $a = b$ atunci conul

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

este un con de rotaţie în jurul axei Oz cu curba meridian

$$\frac{y}{a} = \pm\frac{z}{c}.$$

Revenim la ecuaţia generală şi fixăm una din elipsele

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, z = h.$$

Un plan P care trece prin origine va intersecta conul de ordinul doi după două generatoare, după o singură generatoare sau numai în vârf după cum intersectează elipsa de mai sus în două puncte, într-un singur punct sau în niciun punct. Un plan P_1 care nu trece prin origine va taia conul de ordinul doi după o elipsă, o parabolă sau o hiperbolă după cum planul P paralel cu P_1 dus prin origine nu intersectează elipsa în niciun punct, intersectează elipsa într-un singur punct sau în două puncte. Este motivul pentru care curbele de ordinul doi se numesc conice sau mai precis secţiuni conice.

4.3.4 Hiperboloidul cu o pânză.

Definiţia 4.3.3 *Se numeşte hiperboloid cu o pânză suprafaţa care într-un anumit sistem de coordonate rectangular are o ecuaţie de forma*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

unde a, b, c sunt numere reale strict pozitive. Această ecuaţie se numeşte ecuaţia canonică a hiperboloidului cu o pânză.

Caracteristica ecuaţiei canonice a hiperboloidului cu o pânză este prezenţa unei singure variaţii de semn în şirul coeficienţilor ecuaţiei după ce ne-am aranjat ca primii doi coeficienţi să fie pozitivi.

Hiperboloidul cu o pânză este simetric în raport cu planele de coordonate, în raport cu axele de coordonate şi în raport cu originea axelor de coordonate. Proiecţiile pe planul Oxy ale intersecţiilor cu planele $z = h$ sunt elipsele

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0$$

unde

$$a' = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, b' = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

Cea mai mică elipsă este cea din planul Oxy când $h = 0$ şi se numeşte *elipsa colier* a hiperboloidului cu o pânză. Prin creşterea lui $|h|$ elipsele de intersecţie cresc nemărginit.

Să considerăm conul de ordinul doi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

intersectat cu aceleaşi plane $z = h$; obţinem elipsele cu semiaxele

$$a'' = a\frac{h}{c}, b'' = b\frac{h}{c}.$$

Avem $a'' < a', b'' < b'$, deci conul de ordinul doi se află în interiorul hiperboloidului cu o pânză. Se verifică imediat că avem

$$\lim_{|h|\to\infty} (a' - a'') = \lim_{|h|\to 0} (b' - b'') = 0$$

şi deci prin creşterea lui $|h|$ conul de ordinul doi se apropie asimptotic de hiperboloidul cu o pânză. Din acest motiv conul se numeşte *conul asimptotic al hiperboloidului.*

Intersecţiile hiperboloidului cu o pânză cu planele $x = l$ au proiecţiile pe planul Oyz

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{l^2}{a^2}.$$

Pentru diferiţi $|l| < a$ acestea sunt o familie de hiperbole coasimptotice (cu aceleaşi asimptote) cu axa transversă Oy. Pentru $l = a$ se obţin asimptotele acestei familii. Pentru $|l| > a$ se obţine o familie de hiperbole cu aceleaşi asimptote dar cu axa transversă Oz.

Vedem că prin intersectarea hiperboloidului cu o pânză cu diferite plane am obţinut elipse şi hiperbole. Se poate arăta rotind sistemul $Oxyz$ în jurul lui Oy cu un unghi α şi intersectând cu plane $z' = h$ că există plane care intersectează hiperboloidul după o parabolă sau după drepte paralele.

Mărimile a, b, c se numesc semiaxele hiperboloidului cu o pânză. Dacă $a = b$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

avem un hiperboloid cu o pânză de rotaţie în jurul lui Oz cu curba meridian

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, x = 0.$$

Se poate arăta că o dreaptă care nu intersectează axa Oz prin rotaţie în jurul lui Oz generează un hiperboloid cu o pânză.

Scriind ecuaţia canonică a hiperboloidului cu o pânză sub forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

sau

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

observăm că pentru orice valori ale lui λ, μ dreptele de ecuaţii

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{aligned}$$

se află în întregime pe hiperboloid. Asemenea drepte care se află în întregime pe o suprafaţă se numesc *generatoare rectilinii ale suprafeţei.* Primele drepte formează o familie de generatoare $G\lambda$, celelalte familia $G\mu$.

In ecuaţiile de mai sus convenim să acceptăm fracţii cu numitor nul, subînţelegând că în această situaţie şi numitorul este automat nul. Deci vom accepta valorile $\lambda = 0, \frac{1}{\lambda} = \infty$.

Cum ecuaţiile generatoarelor rectilinii de mai sus sunt de gradul întâi în λ sau μ rezultă proprietatea

P1. Prin fiecare punct al hiperboloidului trece o generatoare şi numai una din fiecare familie $G\lambda, G\mu$.

P2. Două generatoare din aceeaşi familie nu se intersectează niciodată.

Proprietatea rezultă din P1.

P3. Două generatoare din familii diferite se intersectează totdeauna exceptând cazul când trec prin puncte simetrice ale elipsei colier.

Această proprietate rezultă scriind că sistemul celor patru ecuaţii cu trei necunoscute este compatibil cu excepţia amintită.

P4. Paralelele duse prin origine la generatoarele dintr-o familie sunt situate pe conul asimptotic.

P5. Trei generatoare din aceeaşi familie nu pot fi paralele cu acelaşi plan.

In caz contrar cele trei paralele duse prin origine la cele trei generatoare ar fi situate într-un plan care ar tăia conul asimptotic după cele trei drepte, ceea ce este absurd.

P6. Cele două generatoare din familii diferite care trec printr-un punct determină planul tangent la hiperboloid în acel punct.

P7. Nu mai există alte generatoare rectilinii care să treacă printr-un punct.

Dacă ar mai exista a treia generatoare, toate trei ar fi situate în planul tangent în acel punct, plan care ar tăia suprafaţa după trei drepte, ceea ce este absurd.

P8. Hiberboloidul cu o pânză poate fi generat de o dreaptă care se deplasează sprijinindu-se pe trei drepte fixe neparalele cu acelaşi plan. Cele trei drepte fixe fac parte dintr-o familie de generatoare, iar cea mobilă din celaltă familie.

4.3.5 Hiperboloidul cu două pânze

Definiţia 4.3.4 *Se numeşte hiperboloid cu două pânze suprafaţa care într-un anumit sistem de coordonate rectangular are o ecuaţie de forma*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

unde a, b, c sunt numere reale strict pozitive. Această ecuaţie se numeşte ecuaţia canonică a hiperboloidului cu două pânze.

Caracteristica ecuaţiei canonice a hiperboloidului cu două pânze este prezenţa a două variaţii de semn în şirul coeficienţilor ecuaţiei după ce ne aranjăm ca primii doi coeficienţi să fie pozitivi.

Hiperboloidul cu două pânze este simetric în raport cu planele de coordonate, în raport cu axele de coordonate şi în raport cu originea sistemului de coordonate.

Dacă intersectăm cu plane $z = h$ obţinem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2}, z = h.$$

Pentru $|h| < c$ nu există puncte de intersecţie. Deci hiperboloidul cu două pânze nu are puncte între planele $z = \pm h$, deci nu poate admite generatoare rectilinii. Pentru $h = \pm c$ avem ca intersecţii două puncte $C(0, 0, c), C'(0, 0, -c)$ numite *vârfurile hiperboloidului*

cu două pânze. Pentru $|h| > c$ avem elipsele

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0, z = h$$

cu semiaxele

$$a' = a\sqrt{-1 + \frac{h^2}{c^2}}, b' = b\sqrt{-1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

Intersecţiile conului de ordinul doi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

cu aceleaşi plane $z = h$ sunt elipsele cu semiaxele

$$a'' = a\frac{h}{c}, b'' = b\frac{h}{c}.$$

Observăm că $a'' > a', b'' > b'$, adică hiperboloidul cu două pânze este situat în interiorul conului. Se arată uşor că

$$\lim_{|h|\to\infty} (a'' - a') = \lim_{|h|\to\infty} (b'' - b') = 0$$

adică şi aici avem con asimptotic.

Mărimile a, b, c se numesc *semiaxele hiperboloidului cu două pânze.* Dacă $a = b$ avem

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

adică un hiperboloid cu două pânze de rotaţie în jurul lui Oz având curba meridian

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, x = 0.$$

Se poate şi aici arăta că există plane care intersectează hiperboloidul cu două pânze după hiperbole sau parabole.

4.3.6 Paraboloidul eliptic

Definiţia 4.3.5 *Se numeşte paraboloid eliptic suprafaţa care într-un anumit sistem de coordonate rectangular are o ecuaţie de forma*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

unde p, q sunt numere reale strict pozitive. Această ecuaţie se numeşte ecuaţia canonică a paraboloidului eliptic.

Paraboloidul eliptic este simetric în raport cu planele de coordonate Oxz, Oyz şi în raport cu axa Oz. El nu are puncte sub planul $z = 0$.

Intersecţiile paraboloidului eliptic cu planele $z = h \geq 0$ sunt elipsele ale căror proiecţii pe planul Oxy au ecuaţiile

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0$$

adică au semiaxele

$$a' = \sqrt{2ph}, b' = \sqrt{2qh}.$$

Pentru $h = 0$ elipsa se reduce la originea $O(0, 0, 0)$, *vârful paraboloidului eliptic.* Pe măsură ce h creşte semiaxele elipselor cresc nemărginit.

Intersecţiile paraboloidului eliptic cu planele $x = l$ sunt parabolele care în proiecţie pe Oyz au ecuaţiile

$$y^2 = 2qz - \frac{q}{p}l^2.$$

Toate aceste parabole au acelaşi parametru q, deci sunt congruente. Vârfurile lor au coordonatele $(l, 0, \frac{l^2}{2p})$. Intersecţiile cu planele $y = m$ sunt parabolele care în proiecţie pe planul Oxz au ecuaţiile

$$x^2 = 2pz - \frac{p}{q}m^2$$

adică parabole cu acelaşi parametru p, deci congruente, cu vârfurile de coordonate $(0, m, \frac{m^2}{2q})$. Pentru $m = 0$ avem parabola

$$x^2 = 2pz, y = 0.$$

Observăm că vârfurile primelor parabole sunt situate pe ultima parabolă. Rezultă că paraboloidul eliptic poate fi generat de o parabolă care se deplasează rămânând cu vârful pe o altă parabolă, planele celor două parabole fiind perpendiculare, deschiderile celor două fiind dirijate în acelaşi sens.

4.3.7 Paraboloidul hiperbolic

Definiţia 4.3.6 *Se numeşte paraboloid hiperbolic suprafaţa care într-un anumit sistem de coordonate rectangular are o ecuaţie de forma*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

unde p, q sunt numere reale strict pozitive. Această ecuaţie se numeşte ecuaţia canonică a paraboloidului hiperbolic.

Paraboloidul hiperbolic este simetric în raport cu planele de coordonate Oxz, Oyz şi în raport cu axa Oz.

Intersecţiile paraboloidului hiperbolic cu planele $z = h$ au proiecţiile pe planul Oxy de ecuaţii

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h.$$

Pentru $h = 0$ acestea se desfac în două drepte

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

Deci intersecţia paraboloidului hiperbolic cu planul Oxy este constituită din cele două drepte. Pentru $h > 0$ proiecţiile sunt hiperbole coasimptotice cu axa transversă Ox. Pentru $h < 0$ proiecţiile sunt hiperbole conjugate cu primele.

Intersecţiile cu planele $x = l$ sunt

$$y^2 = -2qz + \frac{q}{p}l^2, x = l$$

adică parabole congruente cu vârfurile de coordonate $(l, 0, \frac{l^2}{2p})$. Intersecţiile cu planele $y = m$ sunt

$$x^2 = 2pz + \frac{p}{q}m^2, y = m$$

adică parabole congruente cu vârfurile de coordonate $(0, m, \frac{m^2}{2q})$. Observăm că vârfurile primelor parabole sunt situate pe parabola din planul Oxz. Rezultă că paraboloidul hiperbolic poate fi generat de o parabolă care se deplasează rămând cu vârful pe o altă parabolă, planele celor două parabole fiind perpendiculare, deschiderile parabolelor fiind opuse.

Dacă scriem ecuaţia paraboloidului hiperbolic sub forma

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z$$

deducem că pentru orice λ, μ dreptele

$$G\lambda \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 2\lambda z, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$G\mu \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 2\mu z, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu} \end{cases}$$

sunt situate în întregime pe paraboloid, deci sunt două familii de generatoare rectilinii $G\lambda, G\mu$.

Avem şi aici proprietăţile:

P1. Prin orice punct de pe paraboloid trece câte o generatoare din fiecare familie şi numai câte una.

P2. Două generatoare din aceeaşi familie nu se intersectează niciodată.

P3. Două generatoare din familii diferite se intersectează totdeauna.

P4. Toate generatoarele din aceeaşi familie sunt paralele cu acelaşi plan.

P5. Cele două generatoare din familii diferite care trec printr-un punct determină planul tangent al acelui punct.

P6. Nu există alte familii de generatoare ale paraboloidului hiperbolic.

P7. Paraboloidul hiperbolic poate fi generat de o dreaptă care se deplasează sprijinindu-se pe două drepte fixe şi rămânând paralelă cu un plan fix. Dreptele fixe fac parte dintr-o familie de generatoare, cea mobilă face parte din cealaltă familie de generatoare.

4.3.8 Cuadrice, reducerea ecuaţiei generale la formă canonică

Definiţia 4.3.7 *Se numeşte cuadrică sau suprafaţă de ordinul doi suprafaţa care într-un sistem de coordonate rectangular are o ecuaţie de gradul doi în coordonatele x, y, z, adică o ecuaţie de forma*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

unde coeficienţii reali $a_{ij} = a_{ji}$.

Ecuaţia cuadricei ca şi ecuaţia conicei conţine o formă pătratică, o formă lineară în vectorul de poziţie al punctului curent

$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

şi un termen liber

$$p(\overrightarrow{r}) + 2l(\overrightarrow{r}) + a_{44} = 0.$$

Matricea formei pătratice este matricea simetrică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

matricea linie a formei lineare este

$$L = (a_{41}, a_{42}, a_{43}).$$

Matricea tuturor coeficienţilor este

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} A & L^t \\ L & a_{44} \end{pmatrix}.$$

In cazul cuadricelor se poate arăta prin reducere la formă canonică, adică prin determinarea unui sistem de coordonate prin eventuale translaţii şi rotaţii în care ecuaţia să capete forma canonică, că orice cuadrică este una din suprafeţele: elipsoid, hiperboloid cu o pânză sau două pânze, un paraboloid eliptic sau hiperbolic, un con de ordinul doi, un cilindru de ordinul doi eliptic, hiperbolic sau parabolic, două plane distincte sau nu, paralele sau neparalele.

Şi aici vom avea invarianţi: coeficienţii polinomului caracteristic al matricei A şi determinantul matricii tuturor coeficienţilor $\breve{A}$. O cuadrică poate avea centru de simetrie ale cărui coordonate sunt date de sistemul format cu primele trei linii ale matricii $\breve{A}$. Dacă există centru de simetrie, primul lucru în reducerea la formă canonică este efectuarea unei translaţii în centru după care dispar termenii de ordin întâi în x, y, z. Dacă nu există centru de simetrie, se reduce mai întâi forma pătratică la sumă de pătrate după care se face o translaţie sau o rotaţie a sistemului de coordonate.

Ne vom limita numai la câteva exemple.

Exemplul 4.3.8.1 *Să se studieze cuadrica*

$$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0.$$

Matricea tuturor coeficienţilor este

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -5 \\ -2 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 7 \\ -5 & 4 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Centru de simetrie este dat de sistemul

$$\begin{cases} 5x_0 - 2y_0 + 0z_0 - 5 = 0 \\ -2x_0 + 6y_0 + 2z_0 + 4 = 0 \\ 0x_0 + 2y_0 + 7z_0 + 7 = 0 \end{cases}$$

care are o soluţie unică $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = -1$. Cuadrica are centru unic $C(1, 0, -1)$. Facem o translaţie a sistemului de coordonate în centrul de simetrie prin relaţiile

$$\begin{aligned} x &= x' + 1 \\ y &= y' \\ z &= z' - 1. \end{aligned}$$

Din ecuaţia conicei dispar termenii de gradul întâi şi termenul liber se calculează cu ultima linie $-5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot -1 - 6 = -18$

$$5x'^2 + 6y'^2 + 7z'^2 - 4x'y' + 4y'z' - 18 = 0.$$

Polinomul caracteristic al matricei formei pătratice este

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162)$$

sau

$$P(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9)$$

Deci ecuaţia cuadricei se scrie

$$3X^2 + 6Y^2 + 9Z^2 - 18 = 0$$

sau

$$\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{3} + \frac{Z^2}{2} - 1 = 0$$

adică avem un elipsoid cu semiaxele $a = \sqrt{6}, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{2}$. Găsim versorii proprii

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{i} + \frac{2}{3}\overrightarrow{j} - \frac{1}{3}\overrightarrow{k} \quad pent\mathbf{R}u \quad \lambda = 3 \\ \overrightarrow{J} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{i} - \frac{1}{3}\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}\overrightarrow{k} \quad pent\mathbf{R}u \quad \lambda = 6 \\ \overrightarrow{K} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{i} - \frac{2}{3}\overrightarrow{j} - \frac{2}{3}\overrightarrow{k} \quad pent\mathbf{R}u \quad \lambda = 9. \end{aligned}$$

Legătura între coordonate este

$$\begin{aligned} x &= 1+\frac{1}{3}(2X+2Y-Z) \\ y &= \frac{1}{3}(2X-Y-2Z) \\ z &= -1+\frac{2}{3}(-X+2Y-2Z). \end{aligned}$$

Exemplul 4.3.8.2 *Să se studieze cuadrica*

$$x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-2y+z=0.$$

Matricea tuturor coeficienţilor este

$$\breve{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Centrul ar fi dat de sistemul dat de primele trei linii; ori se vede că sistemul este incompatibil. Polinomul caracteristic al formei pătratice este

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-6).$$

Găsim versorii proprii

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j} && \textit{pentru} \quad \lambda_1=0 \\ \overrightarrow{j'} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{k} && \textit{pentru} \quad \lambda_2=0 \\ \overrightarrow{k'} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{k} && \textit{pentru} \quad \lambda_3=6. \end{aligned}$$

Rezultă că avem formulele de schimbare de coordonate

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ z &= -\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z' \end{aligned}$$

Cum termenii de gradul întâi devin

$$-2y + z = \sqrt{2}x' - \sqrt{3}y'$$

ecuaţia cuadricei devine

$$6z'^2 + \sqrt{2}x' - \sqrt{3}y' = 0.$$

Facem o rotaţie de unghi α în jurul axei Oz', ceea ce revine la schimbarea de coordonate

$$\begin{aligned} x' &= x''\cos\alpha - y''\sin\alpha \\ y' &= x''\sin\alpha + y''\cos\alpha \\ z' &= z''. \end{aligned}$$

Ecuaţia devine

$$6z''^2 + x''(\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha) - y''(\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha) = 0$$

Luând α astfel încât $\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 0$, adică $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}, \sin\alpha = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, rezultă

$$z''^2 = -\frac{\sqrt{5}}{6}x''$$

şi deci suprafaţa este un cilindru de ordinul doi parabolic cu generatoarele paralele cu axa Oy''. Pentru a găsi direcţia axei facem produsul matricelor de trecere

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{3}{5}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Versorul generatoarelor este

$$\overrightarrow{u} = \frac{5}{\sqrt{30}}\overrightarrow{i} - \frac{1}{\sqrt{30}}\overrightarrow{j} - \frac{2}{\sqrt{30}}\overrightarrow{k}.$$

Pentru a găsi elementele geometrice ale suprafeţei nu era nevoie să facem aceste calcule. După ce am văzut că nu există centru de simetrie şi că avem valorile proprii $\lambda_{1,2} = 0$ şi $\lambda_3 = 6$ este clar că forma pătratică este un pătrat perfect şi putem scrie ecuaţia sub forma

$$(x + y + 2z)^2 - (2y - z) = 0$$

adică avem un cilindru de ordinul doi cu generatoarele paralele cu dreapta

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y - z &= 0. \end{aligned}$$

Versorul acestei drepte coincide cu cel găsit mai sus.

Putem găsi o curbă directoare în planul Oxy făcând $z = 0$ în ecuaţia dată

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2y = 0.$$

CAPITOLUL 5

GEOMETRIA DIFERENŢIALĂ

5.1 Geometria diferenţială a curbelor

5.1.1 Curbe parametrizate, curbe de nivel constant

Considerăm spaţiul geometriei elementare E_3 raportat la un sistem de coordonate rectangular $Oxyz$ cu baza $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Definiţia 5.1.1 *Numim curbă parametrizată aplicaţia*

$$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k} : [t_1, t_2] \to E_3.$$

Imaginea $\overrightarrow{r}([t_1, t_2])$ *a intervalului* $[t_1, t_2]$ *se numeşte suportul curbei parametrizate.*

Ecuaţia

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t),\ t \in [t_1, t_2]$$

se numeşte *ecuaţia vectorial parametrică* a curbei parametrizate. Ecuaţiile

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t),\ t \in [t_1, t_2] \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

se numesc *ecuaţiile scalar parametrice* ale curbei parametrizate. Curba parametrizată se numeşte *netedă de ordinul k* dacă funcţia $\overrightarrow{r}(t)$ are derivate de ordinul k continue.

Vom observa că o curbă parametrizată cuprinde pe lângă suportul său şi o ordine de parcurgere sau, alfel spus, un sens de parcurs al acestui suport. Cu toate acestea, de multe ori confundăm curba parametrizată cu suportul său. Când parametrul t este timpul, în mecanică ecuaţia $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t),\ t \in [t_1, t_2]$ este *ecuaţia de mişcare* a unui punct material, iar suportul $\overrightarrow{r}([t_1, t_2])$ este *traiectoria* punctului material.

Exemplul 5.1.1.1 *Se numeşte cicloidă curba descrisă de un punct al unui cerc de rază R care se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă fixă numită bază. Fie un sistem de coordonate Oxy în plan astfel încât axa Ox să fie baza şi punctul O să fie poziţia iniţială a punctului cercului care se rostogoleşte. Alegem un sistem de coordonate $O'XY$ legat de cercul care se roteşte, sistem care în poziţia iniţială este paralel cu sistemul Oxy. Când cercul s-a rotit în rostogolire cu un unghi $-t$ centrul cercului O' are în sistemul fix coordonatele (Rt, R). Matricea de trecere de la baza sistemului Oxy la baza sistemului mobil $O'XY$ fiind*

$$S = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

legătura între coordonate este

$$\begin{aligned} x &= Rt + X\cos t + Y\sin t \\ y &= R - X\sin t + Y\cos t. \end{aligned}$$

Cum coordonatele punctului mobil în sistemul mobil sunt $(0, -R)$ rezultă ecuaţiile scalar parametrice ale cicloidei

$$\begin{aligned} x &= R(t - \sin t) \\ y &= R(1 - \cos t), t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Exemplul 5.1.1.2 *Se numeşte epicicloidă curba descrisă de un punct al unui cerc de rază r care se rostogoleşte fără alunecare în exteriorul unui cerc de rază R. Alegem un sistem de coordonate fix Oxy cu originea în centrul cercului fix astfel încât punctul $M_0(R, 0)$ să fie punctul iniţial al cercului mobil. Alegem un sistem de coordonate $O'XY$ legat de cercul mobil cu originea în centrul acestuia. In poziţia iniţială cele două sisteme sunt paralele. Când linia centrelor OO' face cu Ox unghiul t raza $O'M_0$ face cu linia*

centrelor unghiul θ astfel că $Rt = r\theta$. Cercul mobil s-a rotit cu $\theta + t$ şi deci matricea de trecere de la baza sistemului Oxy la baza sistemului $O'XY$ este

$$S = \begin{pmatrix} \cos(\theta + t) & -\sin(\theta + t) \\ \sin(\theta + t) & \cos(\theta + t) \end{pmatrix}.$$

Coordonatele centrului O' în sistemul fix fiind $((R+r)\cos t, (R+r)\sin t)$ şi coordonatele punctului mobil în sistemul mobil fiind $(-r, 0)$ găsim ecuaţiile epicicloidei

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos t - R\cos\frac{R+r}{r}t, \\ y &= (R+r)\sin t - r\sin\frac{R+R}{r}t. \end{aligned}$$

Pentru $r = R$ epicicloida se numeşte cardioidă.

Dacă cercul se rostogoleşte fără alunecare în interiorul unui cerc, curba descrisă de un punct al cercului mobil se numeşte *hipocicloidă*. Ecuaţiile hipocicloidei se obţin din ecuaţiile epcicicloidei înlocuind r cu -r. Când $r =\frac{R}{4}$ hipocicloida devine astroida de ecuaţii

$$\begin{aligned} x &= R\cos^3 t \\ y &= R\sin^3 t. \end{aligned}$$

Exemplul 5.1.1.3 *Curba parametrizată*

$$\overrightarrow{r} = R\cos t\,\overrightarrow{i} + R\sin t\,\overrightarrow{j} + ht\,\overrightarrow{k}$$

se numeşte elicea circulară, ea fiind situată pe cilindrul circular drept $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

Dacă în planul Oxy avem curba parametrizată

$$\overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i} + f(t)\,\overrightarrow{j}, \quad t \in [x_1, x_2]$$

aceasta se poate scrie şi sub forma

$$\overrightarrow{r}(x) = x\,\overrightarrow{i} + f(x)\,\overrightarrow{j}, \quad x \in [x_1, x_2]$$

sau în ecuaţii scalar parametrice

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= f(x), \quad x \in [x_1, x_2]; \end{aligned}$$

curba parametrizată este graficul funcţiei $f(x) : [x_1, x_2] \to \mathbf{R}$ parcurs de la stânga spre dreaptă. Spunem că avem o *curbă plană definită explicit* cu ecuaţia explicită $y = f(x), \quad x \in [x_1, x_2]$.

Exemplul 5.1.1.4 *Ecuaţia* $y = a \cosh \frac{x}{a}, x \in \mathbf{R}$ *este ecuaţia unei curbe apropiată ca formă de o parabolă, curbă numită lănţişor. Ea dă forma de echilibru a unui fir greu flexibil.*

Definiţia 5.1.2 *Punctul* $\overrightarrow{r}(t_0)$ *al unei curbe parametrizate netede de ordinul întâi se numeşte punct ordinar dacă* $\overrightarrow{r'}(t_0) \neq 0$; *în caz contrar punctul se numeşte punct singular.*

Dacă $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ este ecuaţia de mişcare a unui punct material, vectorul $\overrightarrow{r'}(t_0)$ reprezintă vectorul viteză a punctului material la momentul t_0.

Definiţia 5.1.3 *Numim curbă de nivel constant c a funcţiei* $F(x, y)$ *mulţimea punctelor din planul* Oxy *care satisfac relaţia*

$$F(x, y) = c$$

unde $F(x, y) : D \subset E_2 \to \mathbf{R}$ *este o funcţie reală de două variabile definită pe un domeniu din plan, iar c este o constantă. Curba de nivel constant se numeşte netedă de ordinul k dacă funcţia* $F(x, y)$ *are derivate parţiale de ordinul k continue.*

O curbă dată explicit poate fi considerată ca o curbă de nivel constant 0 a funcţiei $F(x, y) = f(x) - y$.

Definiţia 5.1.4 *Punctul de coordonate* (x, y) *al curbei de nivel constant* $F(x, y) = c$ *se numeşte punct ordinar dacă în acest punct gradientul funcţiei* F *este nenul*

$$\operatorname{grad} F(x, y) = \overrightarrow{\nabla} F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{j} \neq 0;$$

în caz contrar punctul se numeşte punct singular.

Dacă punctul $M(x, y)$ al curbei de nivel constant este ordinar, de exemplu $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, atunci conform teoremei funcţiilor implicite există o vecinătate a acestui punct astfel

încât în această vecinătate variabila y se poate explicita în funcţie de $x : y = y(x)$ astfel încât $F(x, y(x)) = c$. Deci în acea vecinătate curba de nivel constant poate fi considerată ca o curbă dată explicit, deci ca o curbă parametrizată. Această curbă parametrizată are punctul său $M(x, y)$ ca punct ordinar şi este netedă de acelaşi ordin ca şi curba de nivel constant.

Exemplul 5.1.1.5 *Ecuaţia $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ este ecuaţia unui cerc. In vecinătatea oricărui punct cu ordonata $y \neq 0$ se poate explicita $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ dacă ordonata $y > 0$ sau $y = -\sqrt{\mathbf{R}^2 - x^2}$ dacă ordonata $y < 0$. Evident sunt mai convenabile ecuaţiile parametrice $x = R\cos t, y = R\sin t, t \in [0, 2\pi]$.*

Exemplul 5.1.1.6 *Foliul lui Descartes are ecuaţia $x^3 + y^3 - 3axy = 0, a > 0$. In loc să căutăm o explicitare pe baza teoremei funcţiilor implicite, încercăm să vedem care este intersecţia unei drepte $y = tx$ care trece prin origine cu curba. Găsim reprezentarea parametrică*

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}, t \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty).$$

Exemplul 5.1.1.7 *Ecuaţia lemniscatei lui Bernoulli*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

conţine grupul $x^2 + y^2$ ceea ce ne îndeamnă să trecem la coordonatele polare ρ, θ

$$x = \rho co\theta, y = \rho \sin\theta$$

şi obţinem mai întâi ecuaţia în coordonate polare

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

din care obţinem imediat ecuaţii parametrice.

Definiţia 5.1.5 *Se numeşte curbă intersecţie a două suprafeţe de nivel constant mulţimea punctelor de coordonate (x, y, z) din spaţiu care satisfac relaţiile*

$$\begin{cases} F(x,y,z) = c_1, \\ G(x,y,z) = c_2 \end{cases}$$

unde $F(x,y,z), G(x,y,z) : D \subset E_3 \to \mathbf{R}$ *sunt funcţii reale de trei variabile reale. Relaţiile de mai sus se numesc ecuaţiile curbei. Curba intersecţie de suprafeţe de nivel constant este netedă de ordinul k dacă în punctele sale funcţiile* F, G *care o definesc au derivate parţiale de ordinul k continue.*

Definiţia 5.1.6 *Punctul* $M(x,y,z)$ *al unei curbe intersecţie a două suprafeţe de nivel constant de ecuaţii* $F(x,y,z) = c_1, G(x,y,z) = c_2$ *se numeşte punct ordinar dacă în acest punct gradienţii*

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} F(x,y,z) &= \overrightarrow{\nabla} F(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{k} \\ \operatorname{grad} G(x,y,z) &= \overrightarrow{\nabla} G(x,y,z) = \frac{\partial G}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial G}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial G}{\partial z}\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

nu sunt colineari, adică matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

are în punctul (x,y,z) *rangul doi. In caz contrar punctul se numeşte punct singular.*

Dacă o curbă intersecţie de suprafeţe de nivel constant are punctul $M(x,y,z)$ punct ordinar, de exemplu

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci după teorema funcţiilor implicite, există o vecinătate a punctului $M(x,y,z)$ în care coordonatele y, z se explicitează în raport cu coordonate x

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x) \end{cases}$$

astfel încât

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(z)) = c_1, \\ G(x, y(x), z(x)) = c_2. \end{cases}$$

Altfel spus, în vecinătatea acestui punct curba intersecţie de suprafeţe de nivel constant este o curbă parametrizată. După aceeaşi teoremă a funcţiilor implicite, această curbă parametrizată are punctul $M(x,y,z)$ ca punct ordinar şi este netedă de ordinul k dacă curba intersecţie este netedă de ordinul k.

Exemplul 5.1.1.8 *Elicea circulară poate fi dată prin ecuaţiile*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ y - R\sin\frac{z}{h} = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ x - R\cos\frac{z}{h} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - R^2 &= 0, \\ x - R\cos\frac{z}{h} &= 0 \end{aligned}$$

sau chiar

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ y - x\tan\frac{z}{h} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - R^2 &= 0, \\ y - x\tan\frac{z}{h} &= 0. \end{aligned}$$

Exemplul 5.1.1.9 *Curba lui Viviani*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - Rx = 0 \end{cases}$$

este intersecţia dintre o sferă şi un cilindru. Dacă notăm cu M' proiecţia punctului M al curbei pe planul Oxy şi notăm cu t unghiul xOM', triunghiurile OAM', OMM' sunt egale şi deci $OM' = R\cos t$ şi găsim ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = R\cos^2 t, \\ y = R\cos t \sin t, \\ z = R\sin t, t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

5.1.2 Tangenta la o curbă, abscisă curbilinie

Dacă o curbă parametrizată este netedă de ordinul întâi şi are punctul $\overrightarrow{r}(t_0)$ ca punct ordinar, atunci în vecinătatea acestui punct se poate scrie după teorema de la analiză

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(t_0) + \overrightarrow{r'}(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0),$$

adică, abstracţie făcând de termeni neglijabili în $t - t_0$, suportul curbei coincide cu o dreaptă.

Definiţia 5.1.7 *Dreapta de ecuaţie vectorială*

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t_0) + \overrightarrow{r'}(t_0)(t - t_0)$$

se numeşte tangenta la curba parametrizată în punctul regulat $\overrightarrow{r}(t_0)$.

Să considerăm o dreaptă care trece prin punctul $\overrightarrow{r}(t_0)$ şi are direcţia $\overrightarrow{a}$. Distanţa de la punctul $\overrightarrow{r}(t)$ al curbei la această dreaptă este

$$\delta(t) = \frac{|(\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0)) \times \overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{|\overrightarrow{r'}(t_0) \times \overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|}(t - t_0) + o(t - t_0).$$

Avem

$$\delta(t) = o(t - t_0) \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{r'}(t_0)$$

Deci are loc

Teorema 5.1.1 *Tangenta în punctul ordinar* $\overrightarrow{r}(t_0)$ *al unei curbe netede este singura dreaptă care trece prin acest punct pentru care distanţa* $\delta(t)$ *de la punct* $\overrightarrow{r}(t)$ *al curbei la dreaptă este parte neglijabilă în raport cu* $t - t_0$.

Definiţia 5.1.8 *Vectorul* $\overrightarrow{r'}(t_0)$ *se numeşte vectorul tangentă sau vectorul viteză în punctul* $\overrightarrow{r}(t_0)$; *mărimea acestui vector* $\left|\overrightarrow{r'}(t_0)\right|$ *se numeşte viteza în punctul* $\overrightarrow{r}(t_0)$; *versorul vectorului* $\overrightarrow{r}(t_0)$ *se numeşte versorul tangentei şi îl vom nota cu* $\overrightarrow{\tau}(t_0)$.

Observaţii:

1. Dacă punctul $\overrightarrow{r}(t_0)$ este un punct singular al unei curbe parametrizate netede de ordinul k şi dacă $\overrightarrow{r^{(k)}}(t_0)$ este prima derivată nenulă în acest punct, este natural să numim tangentă în acest punct dreapta care trece prin punctul $\overrightarrow{r}(t_0)$ şi are ca direcţie vectorul $\overrightarrow{r^{(k)}}(t_0)$. In acest caz distanţa $\delta(t)$ de la punctul $\overrightarrow{r}(t)$ al curbei la această dreaptă este parte neglijabilă în raport cu $(t - t_0)^k$.

2. Uneori acceptăm curbe parametrizate netede de ordinul întâi pe porţiuni, adică acele curbe pentru care există derivata continuă $\overrightarrow{r'}(t)$ exceptând un număr finit de puncte unde există numai derivatele laterale. In aceste puncte vom vorbi numai de semitangente. Vom mai spune că aceste puncte sunt puncte unghiulare.

Definiţia 5.1.9 *Curbele parametrizate*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r} &= \overrightarrow{r}(t), \quad t \in [t_1, t_2] \\ \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{\rho}(\tau), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2]\end{aligned}$$

se numesc echivalente dacă există o funcţie $t = t(\tau) : [\tau_1, \tau_2] \to [t_1, t_2]$ strict crescătoare astfel că pentru orice $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ avem $\overrightarrow{r}(t(\tau)) = \overrightarrow{\rho}(\tau)$. Dacă curba parametrică este netedă de ordinul k atunci vom considera că şi funcţia $t(\tau)$ are derivată de ordinul k continuă.

Se verifică uşor că avem de-a face cu o veritabilă relaţie de echivalenţă. Cum

$$\overrightarrow{\rho'}(\tau) = \overrightarrow{r'}(t(\tau))t'(\tau)$$

rezultă că pentru curbele echivalente tangentele coincid.

Definiţia 5.1.10 *Dacă extremitatea curbei parametrizate C_1 coincide cu originea curbei parametrizate C_2, curba obţinută prin parcurgerea curbei C_1 şi apoi a curbei C_2 se numeşte suma sau juxtapunerea celor două curbe şi o vom nota prin $C_1 + C_2$. Curba care constă în parcurgerea în sens opus a curbei C se numeşte opusa lui C şi o vom nota prin $-C$..*

Definiţia 5.1.11 *Curba C se numeşte rectificabilă dacă mulţimea lungimilor liniilor poligonale înscrise în curba C are o margine superioară. Această margine superioară se numeşte lungimea curbei C şi o vom nota prin $l(C)$.*

Se verifică uşor că dacă curbele C_1, C_2 sunt rectificabile şi există $C_1 + C_2$, atunci şi suma este rectificabilă şi $l(C_1 + C_2) = l(C_1) + l(C_2)$, adică lungimea este o mărime aditivă în raport cu suma curbelor. La fel se verifică că $l(-C) = l(C)$. Dacă curba parametrizată $C : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), \quad t \in [t_1, t_2]$ este netedă de ordinul întâi este evident că lungimea curbei elementare dC cuprinsă între valorile t şi $t + dt$ ale parametrului este, abstracţie făcând de mărimi negiljabile în raport cu dt, egală cu lungimea segmentului de dreaptă ce uneşte capetele, deci cu

$$|\overrightarrow{r}(t + dt) - \overrightarrow{r}(t)| = |\overrightarrow{r'}(t)dt + o(dt)| = |\overrightarrow{r'}(t)|dt + o(dt).$$

Mărimea $dl = l(dC) = |\overrightarrow{r'}(t)|dt$ se numeşte *elementul de lungime sau lungimea elementară* a curbei C. Cum

$$|\overrightarrow{r'}(t)|dt = |d\overrightarrow{r}| = |dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j} + dz\overrightarrow{k}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

se mai scrie

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

După modul general de aplicare a integralei rezultă

$$l(C) = \int_{t_1}^{t_2} |\overrightarrow{r'}(t)|dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

Definiţia 5.1.12 *Dacă o curbă parametrizată* $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), \quad t \in [t_1, t_2]$ *este netedă de ordinul întâi, numim abscisă curbilinie de origină* $\overrightarrow{r}(t_0)$ *funcţia*

$$\begin{aligned} s &= s(t) : [t_1, t_2] \to [s_1, s_2], \\ s(t) &= \int_{t_0}^{t} |\overrightarrow{r'}(\tau)|d\tau. \end{aligned}$$

Pentru $t > t_0$ funcţia $s(t)$ este egală cu lungimea arcului de curbă cuprins între punctele $\overrightarrow{r}(t_0)$ şi $\overrightarrow{r}(t)$; pentru $t < t_0$ funcţia $s(t)$ este egală cu opusul lungimii arcului de curbă cuprins între punctele $\overrightarrow{r}(t)$ şi $\overrightarrow{r}(t_0)$. Funcţia $s(t)$ este strict crescătoare pentru că

$$s'(t) = |\overrightarrow{r'}(t)| > 0.$$

Deci există funcţia inversă

$$t = t(s) : [s_1, s_2] \to [t_1, t_2]$$

şi deci curba parametrizată $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{r}(t(s)), \quad s \in [s_1, s_2]$ este echivalentă cu curba parametrizată $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), \quad t \in [t_1, t_2]$. Pentru această curbă parametrizată avem

$$\overrightarrow{\rho'}(s) = \overrightarrow{r'}(t(s))t'(s) = \frac{\overrightarrow{r'}(t(s))}{s'(t(s))} = \frac{\overrightarrow{r'}(t(s))}{|\overrightarrow{r'}(t(s))|}.$$

Deci $|\overrightarrow{\rho'}(s)| = 1$, adică vectorul viteză este un versor, versorul tangentei $\overrightarrow{\tau}(s) = \overrightarrow{\rho'}(s)$. Ecuaţia unei curbe parametrizate în care parametrul este o abscisă curbilinie se numeşte *ecuaţia naturală a curbei.*

Dacă $F(x, y) = c$ este o curbă de nivel constant din planul Oxy şi

$$x = x(s), y = y(s), \quad s \in [s_1, s_2]$$

sunt ecuaţiile ei naturale, atunci prin derivare avem

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(s) = 0$$

adică vectorul

$$-\frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{i} + \frac{\partial F}{\partial x}\overrightarrow{j}$$

este un vector tangent la curbă în punctul ordinar $M(x, y)$, iar vectorul

$$\operatorname{grad} F(x, y) = \overrightarrow{\nabla} F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{j}$$

este ortogonal tangentei, adică este un vector normal la curbă. Deci ecuaţia

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

este ecuaţia tangentei în punctul regulat $M_0(x_0, y_0)$, $F(x_0, y_0) = 0$, iar ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

este ecuaţia normalei la curbă în acelaşi punct.

Cum avem

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \overrightarrow{\nabla} F . d\overrightarrow{r}$$

rezultă că vectorul $\operatorname{grad} F(x, y) = \overrightarrow{\nabla} F(x, y)$ este un vector normal la curba de nivel dirijat în sensul de creştere a funcţiei $F(x, y)$.

La fel ca mai sus se arată că în cazul curbei intersecţie de suprafeţe de nivel constant $F(x, y, z) = c_1, G(x, y, z) = c_2$ un vector tangent la curbă în punctul său $M(x, y, z)$ este

$$\operatorname{grad} F(x, y, z) \times \operatorname{grad} G(x, y, z) = \overrightarrow{\nabla} F(x, y, z) \times \overrightarrow{\nabla} G(x, y, z).$$

5.1.3 Plan osculator, normală principală, curbură

Definiţia 5.1.13 *Punctul $\overrightarrow{r}(t)$ al curbei parametrizate $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), \quad t \in [t_1, t_2]$ netedă de ordinul doi se numeşte biordinar dacă vectorul viteză $\overrightarrow{r'}(t)$ şi vectorul acceleraţie $\overrightarrow{r''}(t)$ sunt linear independenţi.*

Dacă

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r} &= \overrightarrow{r}(t), \quad t \in [t_1, t_2] \\ \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{\rho}(\tau) = \overrightarrow{r}(t(\tau)), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2]\end{aligned}$$

sunt curbe parametrizate echivalente netede de ordinul doi, avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\rho'}(\tau) &= \overrightarrow{r'}(t(\tau))t'(\tau) \\ \overrightarrow{\rho''}(\tau) &= \overrightarrow{r'}(t(\tau))t''(\tau) + \overrightarrow{r''}(t(\tau))t'(\tau)^2\end{aligned}$$

adică cele două curbe parametrizate au simultan punctele corespondente biordinare şi subspaţiile generate de vectorii viteză şi acceleraţie sunt aceleaşi.

Fie acum curba parametrizată $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), \quad t \in [t_1, t_2]$ netedă de ordinul doi cu punctul biordinar $\overrightarrow{r}(t_0)$. Se poate scrie

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(t_0) + \overrightarrow{r'}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{r''}(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2),$$

adică abstracţie făcând de termeni neglijabili în raport cu $(t - t_0)^2$, curba coincide cu o parabolă pentru că dacă notăm cu X, Y componentele lui $\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0)$ după $\overrightarrow{r'}(t_0)$ respectiv $\overrightarrow{r''}(t_0)$ avem

$$\begin{cases} X = t - t_0 \\ Y = \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \\ Y = \frac{1}{2}X^2. \end{cases}$$

In plus, observăm că vectorul $\overrightarrow{r''}(t_0)$ este dirijat în interiorul concavităţii parabolei.

Definiţia 5.1.14 *Planul care trece prin punctul biordinar $\overrightarrow{r}(t)$ al unei curbe şi este paralel cu vectorii viteză şi acceleraţie în acest punct se numeşte planul osculator în punctul respectiv.*

Curbele parametrizate echivalente au acelaşi plan osculator în puncte corespondente. Ecuaţia vectorială a planului osculator este

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}(t), \overrightarrow{r'}(t), \overrightarrow{r''}(t)) = 0.$$

Dacă considerăm un plan care trece prin $\overrightarrow{r}(t_0)$ şi are versorul normalei $\overrightarrow{n}$, atunci distanţa de la punctul $\overrightarrow{r}(t)$ al curbei la acest plan va fi

$$\begin{aligned}\delta(t) &= |(\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0))\overrightarrow{n}| = \\ &= |(\overrightarrow{r'}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{r''}(t_0)(t - t_0)^2)\overrightarrow{n}| + o((t - t_0)^2).\end{aligned}$$

Vom avea

$$\delta(t) = o((t-t_0)^2) \Leftrightarrow \overrightarrow{r'}(t_0)\overrightarrow{n} = 0 \quad \wedge \quad \overrightarrow{r''}(t_0)\overrightarrow{n} = 0$$

adică, dacă şi numai dacă planul coincide cu planul osculator în $\overrightarrow{r}(t_0)$. Deci

Teorema 5.1.2 *Singurul plan care trece prin punctul biordinar $\overrightarrow{r}(t_0)$ pentru care distanţa de la punctul $\overrightarrow{r}(t)$ la acest plan este parte neglijabilă în raport cu $(t-t_0)^2$ este planul osculator.*

Fie acum $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s), s \in [s_1, s_2]$ curba parametrizată echivalentă cu curba $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), t \in [t_1, t_2]$, $\overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{r}(t(s))$, s fiind o abscisă curbilinie. Cum $\overrightarrow{\rho'}(s)^2 = 1$, dacă curba este netedă de ordinul doi, prin derivare rezultă $2\overrightarrow{\rho'}(s)\overrightarrow{\rho''}(s) = 0$, adică vectorul $\overrightarrow{\rho''}(s)$ este perpendicular pe tangenta în $\overrightarrow{\rho}(s)$. Versorul $\overrightarrow{\nu}(s)$ al vectorului $\overrightarrow{\rho''}(s)$ se numeşte *versorul normalei principale* la curbă în punctul $\overrightarrow{\rho}(s)$, iar mărimea vectorului $\overrightarrow{\rho''}(s)$ se numeşte *curbura curbei* în acest punct: $C(s) = |\overrightarrow{\rho''}(s)|$. Deci $\overrightarrow{\rho''}(s) = C(s)\overrightarrow{\nu}(s)$.

Intr-un punct de abscisă curbilinie s_0 vom putea scrie

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{\rho}(s_0) + \overrightarrow{\tau}(s_0)(s-s_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\nu}(s_0)C(s_0)(s-s_0)^2 + o((s-s_0)^2).$$

Notând cu X, Y componentele vectorului $\overrightarrow{\rho}(s) - \overrightarrow{\rho}(s_0)$pe baza ortonormată $\overrightarrow{\tau}(s_0), \overrightarrow{\nu}(s_0)$ avem

$$\begin{cases} X = s - s_0, \\ Y = \frac{1}{2}C(s_0)(s-s_0), \\ Y = \frac{1}{2}C(s_0)X^2 \end{cases}$$

din care vedem că parabola care aproximează curba se abate cu atât mai mult de la tangentă cu cât curbura $C(s_0)$ este mai mare, ceea ce justifică denumirea. De altfel avem

Teorema 5.1.3 *O curbă parametrizată are curbura peste tot nulă dacă şi numai dacă suportul ei este un segment de dreaptă.*

In adevăr din $\overrightarrow{\rho''}(s) = 0$ rezultă $\overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{C_1}s + \overrightarrow{C_2}$, c. c. t. d.

Considerăm acum curba parametrizată

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s) = R\cos\frac{s}{R}\overrightarrow{i} + R\sin\frac{s}{R}\overrightarrow{j}, s \in [0, 2\pi R]$$

care reprezintă un cerc în planul Oxy cu centrul în origine de rază R parcurs în sens direct trigonometric. s este o abscisă curbilinie de origine $(R, 0, 0)$. In adevăr avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r'}(s) &= -\sin\frac{s}{R}\overrightarrow{i} + \cos\frac{s}{R}\overrightarrow{j}, |\overrightarrow{r'}(s)| = 1 \\ \overrightarrow{r''}(s) &= -\frac{1}{R}(\cos\frac{s}{R}\overrightarrow{i} + \sin\frac{s}{R}\overrightarrow{j})\end{aligned}$$

şi deci în toate punctele curbura este constantă $C(s) = \frac{1}{R}$.

Fie acum o curbă parametrizată cu o ecuaţie naturală $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s), s \in [s_1, s_2]$. In jurul punctului de abscisă s_0 se poate scrie

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{\rho}(s_0) + \overrightarrow{\tau}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\nu}(s_0)C(s_0)(s - s_0)^2 + o((s - s_0)^2).$$

Considerăm acum un cerc care trece prin acelaşi punct $\overrightarrow{\rho}(s_0)$ în care are aceeaşi tangentă $\overrightarrow{\tau}(s_0)$ şi aceeaşi normală principală $\overrightarrow{\nu}(s_0)$. Pentru el vom putea scrie

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s) = \overrightarrow{\rho}(s_0) + \overrightarrow{\tau}(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\nu}(s_0)\frac{1}{R}(s - s_0)^2 + o((s - s_0)^2).$$

Vom avea $\overrightarrow{r}(s) - \overrightarrow{\rho}(s) = o((s - s_0)^2)$ dacă şi numai dacă $\frac{1}{R} = C(s_0)$. In acest caz, în vecinătatea lui $\overrightarrow{\rho}(s_0)$ cercul şi curba vor diferi numai prin mărimi neglijabile în raport cu $(s-s_0)^2$. Acest cerc se numeşte *cercul osculator al curbei* în punctul $\overrightarrow{\rho}(s_0)$, iar centrul acestui cerc, punctul de vector de poziţie

$$\overrightarrow{\rho}(s_0) + \frac{1}{C(s_0)}\overrightarrow{\nu}(s_0) = \overrightarrow{\rho}(s_0) + \frac{1}{C(s_0)^2}\overrightarrow{\rho''}(s_0)$$

se numeşte *centrul de curbură al curbei* în punctul $\overrightarrow{\rho}(s_0)$. Raza acestui cerc $R(s_0) = \frac{1}{C(s_0)}$ se numeşte *raza de curbură a curbei* în punctul $\overrightarrow{\rho}(s_0)$. Deci, încă odată, în vecinătatea punctului $\overrightarrow{\rho}(s_0)$, curba poate fi aproximată abstracţie făcând de termeni neglijabili în raport cu $(s - s_0)^2$ cu un cerc cu centrul în centrul de curbură al punctului şi cu raza egală cu raza de curbură a punctului.

5.1.4 Baza şi triedrul lui Frenét

Fie curba parametrizată de ecuaţie $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), t \in [t_1, t_2]$ şi fie $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s)$, $s \in [s_1, s_2]$ echivalenta sa cu parametrizare naturală. In punctul biordinar $\overrightarrow{r}(t)$ avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r'}(t) &= \overrightarrow{\rho'}(s)s'(t), \quad s'(t) = |\overrightarrow{r'}(t)|, \\ \overrightarrow{r''}(t) &= \overrightarrow{\rho''}(s)s'(t)^2 + \overrightarrow{\rho'}(s)s''(t).\end{aligned}$$

$$s''(t) = \left(\sqrt{\overrightarrow{r'}(t)^2}\right)' = \frac{\left(\overrightarrow{r'}(t)^2\right)'}{2\sqrt{\overrightarrow{r'}(t)^2}} = \frac{\overrightarrow{r'}(t).\overrightarrow{r''}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t)|}.$$

Rezultă

$$\overrightarrow{\rho''}(s) = \frac{1}{|\overrightarrow{r'}(t)|^4}\left[\overrightarrow{r''}(t).\left(\overrightarrow{r'}(t)^2\right) - \overrightarrow{r'}(t).\left(\overrightarrow{r'}(t)\overrightarrow{r''}(t)\right)\right]$$

sau

$$\overrightarrow{\rho''}(s) = \frac{\left(\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\right) \times \overrightarrow{r'}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t)|^4}.$$

Deci curbura în punctul $\overrightarrow{r}(t)$ este

$$C(t) = \frac{\left|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\right|}{|\overrightarrow{r'}(t)|^3}$$

iar versorii tangentei şi normalei principale sunt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\tau}(t) &= \frac{\overrightarrow{r'}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t)|},\\ \overrightarrow{\nu}(t) &= \frac{\left(\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\right) \times \overrightarrow{r'}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t)||\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)|}.\end{aligned}$$

Definiţia 5.1.15 *Se numeşte bază a lui Frenét în punctul biordinar $\overrightarrow{r}(t)$ al curbei parametrizate $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), t \in [t_1, t_2]$ baza ortonormată dreaptă $\left(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t), \overrightarrow{\beta}(t)\right)$ cu*

$$\overrightarrow{\beta}(t) = \overrightarrow{\tau}(t) \times \overrightarrow{\nu}(t) = \frac{\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)|}.$$

Definiţia 5.1.16 *Se numeşte triedrul lui Frenét în punctul biordinar $\overrightarrow{r}(t)$ al curbei parametrizate $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), t \in [t_1, t_2]$ triedrul rectangular cu vârful în $\overrightarrow{r}(t)$ ale cărui muchii au direcţiile versorilor $\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t), \overrightarrow{\beta}(t)$. Muchia cu direcţia $\overrightarrow{\tau}(t)$ este tangenta în punctul $\overrightarrow{r}(t)$, muchia cu direcţia $\overrightarrow{\nu}(t)$ se numeşte normala principală în punctul $\overrightarrow{r}(t)$, muchia cu direcţia $\overrightarrow{\beta}(t)$ se numeşte binormala în punctul $\overrightarrow{r}(t)$. Planul care trece prin $\overrightarrow{r}(t)$ şi se sprijină pe versorii $\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t)$ este planul osculator în $\overrightarrow{r}(t)$, planul care trece prin $\overrightarrow{r}(t)$ şi se sprijină pe versorii $\overrightarrow{\nu}(t), \overrightarrow{\beta}(t)$ se numeşte planul normal în punctul $\overrightarrow{r}(t)$, planul care trece prin $\overrightarrow{r}(t)$ şi se sprijină pe versorii $\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\beta}(t)$ se numeşte planul rectificant în punctul $\overrightarrow{r}(t)$.*

Cum $\overrightarrow{r'}(t) = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k}$ rezultă ecuaţiile scalare ale tangentei

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)}$$

şi ecuaţia scalară a planului normal

$$x'(t)(x - x(t)) + y'(t)(y - y(t)) + z'(t)(z - z(t)) = 0.$$

Dacă notăm cu $A(t), B(t), C(t)$ minorii cu semne alternate extraşi din matricea

$$\begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{pmatrix}$$

atunci ecuaţiile scalare ale binormalei sunt

$$\frac{x - x(t)}{A(t)} = \frac{y - y(t)}{B(t)} = \frac{z - z(t)}{C(t)}$$

iar ecuaţia scalară a planului osculator este

$$A(t)(x - x(t)) + B(t)(y - y(t)) + C(t)(z - z(t)) = 0.$$

Dacă notăm cu $D(t), E(t), F(t)$ minorii cu semne alternate extraşi din matricea

$$\begin{pmatrix} A(t) & B(t) & C(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \end{pmatrix}$$

atunci ecuaţiile scalare ale normalei principale sunt

$$\frac{x - x(t)}{D(t)} = \frac{y - y(t)}{E(t)} = \frac{z - z(t)}{F(t)}$$

iar ecuaţia scalară a planului rectificant este

$$D(t)(x - x(t)) + E(t)(y - y(t)) + F(t)(z - z(t)) = 0.$$

Avem

$$\overrightarrow{\tau'}(t) = \left(\overrightarrow{\rho'}(s(t))\right)' = \overrightarrow{\rho''}(s(t))s'(t) = C(t)s'(t)\overrightarrow{\nu}(t).$$

Pentru a exprima derivatele versorilor bazei lui Frenét vom scrie

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t), \overrightarrow{\beta}(t)\right) &= \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right) S(t), \\ \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right) &= \left(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t), \overrightarrow{\beta}(t)\right) S^t(t) \end{aligned}$$

unde $S(t)$ este matricea ortogonală ($S^t(t)S(t) = I$) a componentelor versorilor bazei lui Frenét pe baza sistemului de coordonate. Vom avea prin derivare

$$\left(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t), \overrightarrow{\beta}(t)\right)' = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right) S'(t) = \left(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t), \overrightarrow{\beta}(t)\right) S^t(t)S'(t).$$

Dar matricea $\Omega(t) = S^t(t)S'(t)$ este antisimetrică, aceasta rezultă din relaţia $S^t(t)S'(t)+ S'^t(t)S(t) = 0$. Ţinând cont de relaţia stabilită mai sus $\overrightarrow{\tau'}(t) = C(t)s'(t)\overrightarrow{\nu}(t)$ rezultă că trebuie să avem

$$\Omega(t) = S^t(t)S'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -C(t)s'(t) & 0 \\ C(t)s'(t) & 0 & -T(t)s'(t) \\ 0 & T(t)s'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Mărimea $T(t)$ se numeşte *torsiunea curbei în punctul* $\overrightarrow{r}(t)$. Deci putem scrie

$$\left(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t), \overrightarrow{\beta}(t)\right)' = \left(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t), \overrightarrow{\beta}(t)\right) \begin{pmatrix} 0 & -C(t) & 0 \\ C(t) & 0 & -T(t) \\ 0 & T(t) & 0 \end{pmatrix} s'(t).$$

Această relaţie matriceală scrisă pe componente dă aşa numitele *formule ale lui Frenét*. Ele dau vitezele de variaţie ale versorilor bazei lui Frenét. Se mai numesc şi formulele de derivare ale bazei lui Frenet.

Mişcarea infinitezimală a triedrului lui Frenét pe curbă se compune dintr-o translaţie infinitezimală a vârfului şi o rotaţie infinitezimală $d\overrightarrow{\omega} = d\alpha\overrightarrow{\tau} + d\beta\overrightarrow{n} + d\gamma\overrightarrow{\beta}$. Am arătat că rotaţiile infinitezimale se adună. Vom avea atunci

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{\tau} &= d\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\tau} = d\gamma\overrightarrow{n} - d\beta\overrightarrow{\beta}, \\ d\overrightarrow{\nu} &= d\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\nu} = -d\gamma\overrightarrow{\tau} + d\alpha\overrightarrow{\beta}, \\ d\overrightarrow{\beta} &= d\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\beta} = d\beta\overrightarrow{\tau} - d\alpha\overrightarrow{\nu}. \end{aligned}$$

Comparând cu formulele lui Frenét rezultă

$$\frac{d\alpha}{dt} = T(t)s'(t), \frac{d\beta}{dt} = 0, \frac{d\gamma}{dt} = C(t)s'(t),$$

adică nu există rotaţie infinitezimală în jurul normalei principale, iar rotaţiile infinitezimale raportate la unitatea de parametru în jurul binormalei şi în jurul tangentei sunt curbura şi torsiunea în punctul respectiv înmulţite cu viteza în punctul respectiv.

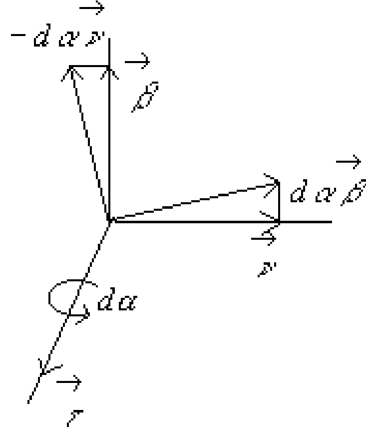


Fig. 5.1: Rotirea în jurul tangentei

Vectorul vitezei de rotaţie instantanee

$$\overrightarrow{\omega}(t) = (T(t)\overrightarrow{\tau}(t) + C(t)\overrightarrow{\beta}(t))s'(t).$$

se numeşte *vectorul lui Darboux* în punctul $\overrightarrow{r}(t)$.

Dacă considerăm curba parametrizată netedă de ordinul trei cu ecuaţie naturală $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s)$, $s \in [s_1, s_2]$ vom putea scrie

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\rho'}(s) &= \overrightarrow{\tau}(s) \\ \overrightarrow{\rho''}(s) &= C(s)\overrightarrow{\nu}(s) \\ \overrightarrow{\rho'''}(s) &= C'(s)\overrightarrow{\nu}(s) + C(s)(-C(s)\overrightarrow{\tau}(s) + T(s)\overrightarrow{\beta}(s)) \end{aligned}$$

şi deci în vecinătatea punctului luat ca origină a abscisei curbilinii vom avea

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\rho}(s) &= \overrightarrow{\rho}(0) + \overrightarrow{\tau}(0)s + \frac{1}{2}C(0)\overrightarrow{v}(0)s^2 + \\ &+\frac{1}{6}\left[C'(0)\overrightarrow{\nu}(0) + C(0)(-C(0)\overrightarrow{\tau}(0) + T(0)\overrightarrow{\beta}(0))\right]s^3 + o(s^3). \end{aligned}$$

Notând cu X, Y, Z componentele lui $\overrightarrow{\rho}(s) - \overrightarrow{\rho}(0)$ după baza lui Frenét a punctului avem

$$\begin{aligned} X &= s - \frac{1}{6}C(0)^2 s^3 + o(s^3), \\ Y &= \frac{1}{2}C(0)s^2 + \frac{1}{6}C'(0)s^3 + o(s^3), \\ Z &= \frac{1}{6}C(0)T(0)s^3 + o(s^3). \end{aligned}$$

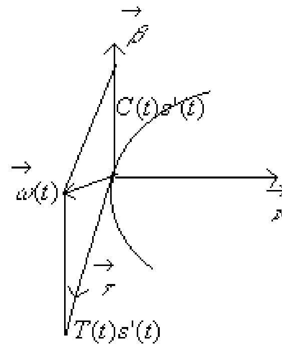


Fig. 5.2: Vectorul lui Darboux

Regăsim astfel că abstracţie făcând de termeni neglijabili în raport cu s^2 curba se găseşte în planul osculator, fiind o parabolă de ecuaţii

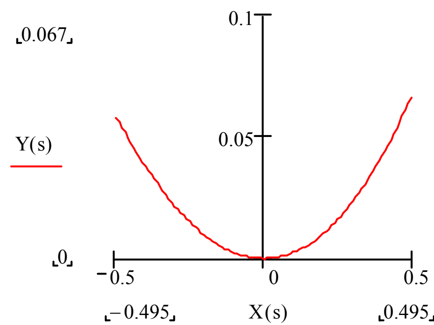


Fig. 5.3: Proiecţia curbei pe planul osculator

$$
\begin{aligned}
X &= s, \\
Y &= \frac{1}{2}C(0)s^2
\end{aligned}
$$

şi care se îndepărtează cu atât mai repede de tangentă cu cât $C(0)$ este mai mare. Proiecţia curbei pe planul rectificant este, abstracţie făcând de termeni nelijabili în raport cu s^3, o curbă de ecuaţii

$$
X = s - \frac{1}{6}C(0)^2 s^3,
$$

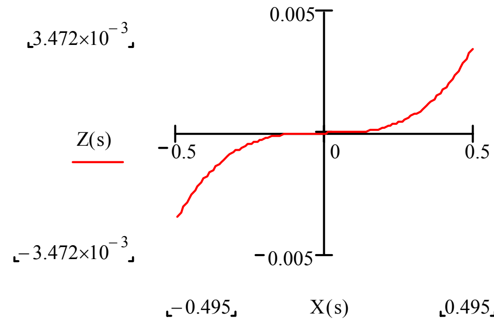


Fig. 5.4: Proiecţia curbei pe planul rectificant

$$Z = \frac{1}{6}C(0)T(0)s^3$$

care prezintă în origine un punct de inflexiune, curba trecând de-o parte şi de alta a tangentei, îndepărtându-se cu atât mai repede de tangentă cu cât torsiunea $T(0)$ este mai mare. Proiecţia curbei pe planul normal este, abstracţie făcând de termeni nelijabili în raport cu s^3, o curbă de ecuaţii

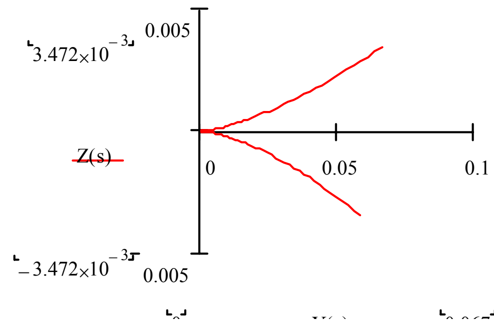


Fig. 5.5: Proiecţia curbei pe planul normal

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2}C(0)s^2 + \frac{1}{6}C'(0)s^3, \\ Z &= \frac{1}{6}C(0)T(0)s^3 \end{aligned}$$

adică o curbă care în origine prezintă un punct de întoarcere, curba îndepărtându-se de normala principală cu atât mai repede cu cât torsiunea $T(0)$ este mai mare. In concluzie putem spune că torsiunea $T(0)$ arată cât de repede se îndepărtează curba de planul osculator. De altfel are loc

Teorema 5.1.4 *O curbă parametrizată are în toate punctele torsiunea nulă dacă şi numai dacă ea este o curbă plană.*

In adevăr, dacă în toate punctele curbei $T(s) = 0$ atunci $\overrightarrow{\beta'}(s) = 0$ şi deci $\overrightarrow{\beta}(s) = \overrightarrow{\beta_0}$, un vector constant. Atunci $\overrightarrow{\rho'}(s)\overrightarrow{\beta_0} = 0$ şi deci $\overrightarrow{\rho}(s)\overrightarrow{\beta_0} = C$, deci curba se află într-un plan perpendicular pe $\overrightarrow{\beta_0}$. Invers, dacă curba este plană atunci planul ei este plan osculator în toate punctele şi deci $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta_0}$ şi $T(s) = 0$.

Dacă curba parametrizată netedă de ordinul trei are ecuaţia $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), t \in [t_1, t_2]$ atunci putem scrie

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r'}(t) &= \overrightarrow{\tau}(t)s'(t), \quad s'(t) = |\overrightarrow{r'}(t)|, \\
\overrightarrow{r''}(t) &= \overrightarrow{\nu}(t)C(t)s'(t)^2 + \cdots \\
\overrightarrow{r'''}(t) &= \overrightarrow{\beta}(t)C(t)T(t)s'(t)^3 + \cdots
\end{aligned}$$

unde prin $\cdots$ am notat termenii linear dependenţi de cei de pe linia precedentă. Luând lungimea lui $\overrightarrow{r'}(t)$, aria paralelogramului construit pe $\overrightarrow{r'}(t), \overrightarrow{r''}(t)$ şi aria paralelipipedului construit pe $\overrightarrow{r'}(t), \overrightarrow{r''}(t), \overrightarrow{r'''}(t)$ avem formulele de calcul pentru curbură şi torsiune

$$\begin{aligned}
s'(t) &= |\overrightarrow{r'}(t)|, \\
C(t) &= \frac{|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)|}{|\overrightarrow{r'}(t)|^3}, \\
T(t) &= \frac{(\overrightarrow{r'}(t), \overrightarrow{r''}(t), \overrightarrow{r'''}(t))}{|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)|^2}
\end{aligned}$$

Cu notaţiile de mai înainte, avem formulele

$$\begin{aligned}
C(t) &= \frac{A(t)^2 + B(t)^2 + C(t)^2}{(x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2)^{3/2}}, \\
T(t) &= A(t)x'''(t) + B(t)y'''(t) + C(t)z'''(t).
\end{aligned}$$

5.1.5 Curbe plane

Fie o curbă parametrizată situată în planul Oxy

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Conform definiţiilor generale, versorii tangentei şi normalei principale sunt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\tau}(t) &= \frac{\overrightarrow{r'}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t)|} = \frac{x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j}}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}},\\ \overrightarrow{\nu}(t) &= \frac{\left(\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\right) \times \overrightarrow{r'}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t)||\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)|}.\end{aligned}$$

Cum

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t) &= \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} \overrightarrow{k},\\ \left(\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)\right) \times \overrightarrow{r'}(t) &= \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} (-y'(t)\overrightarrow{i} + x'(t)\overrightarrow{j})\end{aligned}$$

rezultă versorul normalei

$$\overrightarrow{\nu}(t) = \operatorname{sgn}\left(\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}\right) \frac{-y'(t)\overrightarrow{i} + x'(t)\overrightarrow{j}}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}}.$$

Deci avem

$$\overrightarrow{\tau}(t) \times \overrightarrow{\nu}(t) = \operatorname{sgn}\left(\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}\right) \overrightarrow{k}$$

adică, baza $(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t))$ este orientată la fel ca baza $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ numai dacă

$$\operatorname{sgn}\left(\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}\right) = 1.$$

Uneori se convine ca pentru curbele plane să se redefinească versorul normalei astfel încât baza $(\overrightarrow{\tau}(t), \overrightarrow{\nu}(t))$ să fie orientată la fel ca baza $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, adică se alege pur şi simplu versorul normalei

$$\overrightarrow{\nu}(t) = \frac{-y'(t)\overrightarrow{i} + x'(t)\overrightarrow{j}}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2}},$$

adică $\overrightarrow{\nu}(t)$ se obţine prin rotirea lui $\overrightarrow{\tau}(t)$ cu $\frac{\pi}{2}$ în sens direct trigonometric. Atunci pentru a avea relaţiile

$$\begin{cases} \overrightarrow{\tau'}(t) = C(t)s'(t)\overrightarrow{\nu}(t), \\ \overrightarrow{\nu'}(t) = -C(t)s'(t)\overrightarrow{\tau}(t) \end{cases}$$

trebuie să luăm curbura cu semn dată de relaţia

$$C(t) = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Cu această convenţie, curba are curbură pozitivă într-un punct dacă în acel punct curba se încovoaie în spre versorul $\overrightarrow{\nu}(t)$ şi are curbură negativă dacă curba se încovoaie în spre $-\overrightarrow{\nu}(t)$.

Pentru curbele date explicit prin $y = y(x), \quad x \in [x_1, x_2]$ curbura cu semn este dată de relaţia

$$C(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}$$

şi curbura este pozitivă dacă $y''(x) > 0$, adică dacă funcţia $y(x)$ este convexă.

Fie acum s o abscisă curbilinie pe această curbă plană şi $\overrightarrow{r} = x(s)\overrightarrow{i} + y(s)\overrightarrow{j}$, $s \in [s_1, s_2]$ o parametrizare naturală a sa. Atunci versorul tangentei $\overrightarrow{\tau}(s) = x'(s)\overrightarrow{i} + y'(s)\overrightarrow{j}$. Dacă notăm cu $\theta(s)$ unghiul pe care îl face acest versor cu axa Ox pozitivă, atunci

$$\overrightarrow{\tau}(s) = \cos\theta(s)\overrightarrow{i} + \sin\theta(s)\overrightarrow{j}$$

şi versorul normalei cu convenţia făcută va fi

$$\overrightarrow{\nu}(s) = -\sin\theta\overrightarrow{i} + \cos\theta(s)\overrightarrow{i}.$$

Atunci

$$\overrightarrow{\tau'}(s) = (-\sin\theta\overrightarrow{i} + \cos\theta(s)\overrightarrow{i})\theta'(s) = \theta'(s)\overrightarrow{\nu}(s).$$

Rezultă

$$C(s) = \theta'(s)$$

adică, curbura este viteza de variaţie în raport cu abscisa curbilinie a unghiului pe care îl face tangenta cu axa Ox. Altfel spus, curbura este viteza sau rapiditatea de încovoiere a curbei în punctul respectiv.

Dacă pentru o curbă plană cunoaştem curbura sa în funcţie de o abscisă curbilinie, atunci cunoaştem unghiul $\theta(s) = \Theta(s) + \theta_0$, abstracţie făcând de constanta θ_0. Am notat $\Theta(s)$ o primitivă a lui $\theta'(s)$. Atunci cunoaştem versorul tangentei, adică cunoaştem derivatele în raport cu abscisa curbilinie ale coordonatelor punctelor curbei

$$\begin{aligned} x'(s) &= \cos(\Theta(s) + \theta_0) = \cos\Theta(s)\cos\theta_0 - \sin\Theta(s)\sin\theta_0, \\ y'(s) &= \sin(\Theta(s) + \theta_0) = \sin\Theta(s)\cos\theta_0 + \cos\Theta(s)\sin\theta_0 \end{aligned}$$

şi dacă notăm cu $X(s), Y(s)$ primitive ale lui $\cos\Theta(s)$ respectiv $\sin\Theta(s)$, putem scrie

$$\begin{aligned} x(s) &= X(s)\cos\theta_0 - Y(s)\sin\theta_0 + x_0, \\ y(s) &= X(s)\sin\theta_0 + Y(s)\cos\theta_0 + y_0 \end{aligned}$$

unde x_0, y_0 sunt constante arbitrare. Dacă ne dăm coordonatele $(x(s_0), y(s_0))$ ale unui punct corespunzător abscisei s_0 şi versorul tangentei la curbă în acel punct, adică una din componentele $x'(s_0), y'(s_0)$ (cealaltă se determină din condiţia de versor) avem trei ecuaţii cu trei necunoscute x_0, y_0, θ_0 pe care le putem determina univoc. Deci avem

Teorema 5.1.5 *O curbă plană este cunoscută abstracţie făcând de o deplasare în plan dacă cunoaştem curbura sa funcţie de abscisa curbilinie. Curba este univoc determinată dacă cunoaştem în plus un punct al său şi tangenta la curbă în acest punct.*

Având în vedere acestă teoremă, ecuaţia $\theta = \theta(s)$ sau $s = s(\theta)$ se numeşte uneori *ecuaţia intrinsecă a unei curbe plane.*

Exemplul 5.1.5.1 *Lanţişorul* $y = a\cosh\frac{x}{a}, x \in \mathbf{R}$, *are ca ecuaţie intrinsecă ecuaţia* $\theta = \arctan\frac{s}{a}$ *sau* $s = a\tan\theta$.

Această teoremă este de fapt un caz particular: o curbă în spaţiu este cunoscută abstracţie făcând de o deplasare în spaţiu dacă cunoaştem curbura şi torsiunea sa ca funcţii de abscisa curbilinie. Curba este univoc determinată dacă cunoaştem în plus un punct al curbei şi poziţia triedrului lui Frenét în acest punct al curbei.

Uneori o curbă plană este dată prin ecuaţia sa în coordonate polare

$$\rho = \rho(\theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2].$$

Aici ρ este distanţa polară, adică distanţa de la punct la origine, iar θ este unghiul polar, adică unghiul făcut de raza vectoare a punctului cu axa Ox pozitivă. Dacă cunoaştem ecuaţia în coordonate polare, cunoaştem şi reprezentarea parametrică

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \rho(\theta)\sin\theta\,\overrightarrow{j}, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2].$$

Vom avea

$$s'(\theta) = |\overrightarrow{r}(\theta)| = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}.$$

Aplicând formula pentru curbură găsim

$$C(\theta) = \frac{\rho(\theta)^2 + 2\rho'(\theta)^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta)}{(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2)^{3/2}}.$$

Pentru curba plană linie de nivel constant $F(x, y) = c$ se găseşte pentru curbură expresia

$$C(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}}$$

unde am notat $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$,etc.

5.1.6 Evolută, evolventă

Fie curba parametrizată plană cu o ecuaţie naturală $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s), s \in [s_1, s_2]$. Formulele lui Frenét sunt

$$\overrightarrow{\tau'}(s) = \frac{1}{R(s)}\overrightarrow{\nu}(s), \overrightarrow{\nu'}(s) = -\frac{1}{R(s)}\overrightarrow{\tau}(s).$$

Curba loc geometric al centrelor de curbură va avea ecuaţia

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{r}(s) + R(s)\overrightarrow{\nu}(s).$$

Putem scrie

$$\overrightarrow{\rho'}(s) = \overrightarrow{\tau}(s) + R'(s)\overrightarrow{\nu}(s) - R(s)\frac{1}{R(s)}\overrightarrow{\tau}(s) = R'(s)\overrightarrow{\nu}(s).$$

Rezultă că normala la curba iniţială este tangentă la curba loc al centrelor de curbură. Se spune că această curbă este *înfăşurătoarea normalelor* la curba iniţială, ea se numeşte *evoluta* curbei iniţiale.

Dacă $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}, t \in [t_1, t_2]$, este ecuaţia vectorial parametrică a curbei iniţiale, atunci ecuaţia evolutei este

$$\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{r}(t) + \frac{|\overrightarrow{r'}(t)|^2(\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)) \times \overrightarrow{r'}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t) \times \overrightarrow{r''}(t)|^2}$$

sau scalar

$$x = x(t) - y'(t)\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}},$$
$$y = y(t) + x'(t)\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}.$$

Cum avem

$$|\overrightarrow{\rho'}(s)| = R'(s)$$

rezultă

$$\int_{s_1}^{s_2} |\overrightarrow{\rho'}(\sigma)| d\sigma = R(s_2) - R(s_1),$$

adică curba iniţială se poate obţine din evolută dacă de-a lungul acesteia punem un fir şi desfacem firul păstrându-l tangent la evolută; capătul firului descrie curba iniţială. Se zice despre curba iniţială că este *desfăşurata* sau *evolventa* evolutei. Mai putem considera că evolventa este descrisă de un punct al unei drepte -tangenta de mai sus- care se rostogoleşte fără alunecare de-alungul evolutei.

Pentru a găsi evolventa curbei iniţiale $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s), s \in [s_1, s_2]$ să observăm că evolventa este de fapt o traiectorie ortogonală a tangentelor sale. Punctul evolventei fiind pe tangentă, evolventa are ecuaţia parametrică

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{r}(s) + \lambda(s)\overrightarrow{\tau}(s).$$

Cum

$$\overrightarrow{\rho'}(s) = \overrightarrow{\tau}(s)(1 + \lambda'(s)) + \lambda(s)\frac{1}{R(s)}\overrightarrow{\nu}(s).$$

Ca evolventa să fie în adevăr ortogonală tangentei, trebuie ca $\lambda'(s) = -1$ sau $\lambda(s) = -s + k$. Avem deci o infinitate de evolvente de ecuaţie vectorial parametrică

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{r}(s) + (-s + k)\overrightarrow{r}(s).$$

Dacă ecuaţia curbei iniţiale este $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}, t \in [t_1, t_2]$ atunci ecuaţia evolventelor este

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) + (-\int_{t_0}^{t} |\overrightarrow{r'}(\tau)| d\tau + k)\frac{\overrightarrow{r'}(t)}{|\overrightarrow{r'}(t)|}$$

sau scalar

$$\begin{aligned} x &= x(t) + \left(-\int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau + k\right) \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \\ y &= y(t) + \left(-\int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau + k\right) \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}. \end{aligned}$$

5.1.7 Infăşurătoarea unei familii de curbe

Definiţia 5.1.17 *Familia uniparametrică de curbe de nivel constant*

$$F(x, y, \lambda) = 0, \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2],$$

admite înfăşurătoare curba γ dacă în fiecare punct al său curba γ este tangentă unei curbe din familie.

Dacă M este un punct curent al înfăşurătoarei γ, atunci prin acest punct trece o curbă $C\lambda$ din familie corespunzătoare valorii λ a parametrului. Invers, fiecărei curbe $C\lambda$ din familie, adică fiecărei valori a lui λ îi corespunde un punct al lui γ în care cele două curbe sunt tangente. Deci coordonatele punctului curent M vor fi funcţii de λ

$$x = x(\lambda), y = y(\lambda).$$

Scriind că punctul se află pe $C\lambda$ avem

$$F(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0.$$

Derivând în raport cu λ avem

$$F_x x'(\lambda) + F_y y'(\lambda) + F\lambda = 0.$$

Cum curbele γ şi $C\lambda$ sunt tangente, presupunând că M este punct ordinar pentru ambele curbe, avem

$$\frac{x'(\lambda)}{-F_y} = \frac{y'(\lambda)}{F_x} \Rightarrow F_x x'(\lambda) + F_y y'(\lambda) = 0$$

şi rezultă

$$F\lambda(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0.$$

In concluzie, dacă familia uniparametrică admite înfăşurătoare în puncte ordinare, atunci coordonatele acestor puncte satisfac simultan ecuaţiile

$$\begin{aligned} F(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= 0, \\ F\lambda(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Invers nu este adevărat, dacă din sistemul de mai sus eliminăm λ obţinem ecuaţia unei curbe

$$\varphi(x, y) = 0$$

care nu este totdeauna înfăşurătoarea familiei. Dacă fiecare curbă $C\lambda$ din familie are un punct singular M de coordonate $x(\lambda), y(\lambda)$ atunci în acest punct vom avea

$$\begin{aligned} F(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= 0, \\ F_x(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= 0, \\ F_y(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Derivând prima relaţie rezultă

$$F\lambda(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0,$$

adică şi locul geometric al punctelor singulare ale familiei verifică sistemul

$$\begin{aligned} F(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= 0, \\ F\lambda(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Mulţimea punctelor care satisfac acest sistem constituie *curba discriminantă a familiei.* Pentru a vedea ce reprezintă curba discriminantă a familiei formăm matricea

$$m = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F\lambda \\ F_{\lambda x} & F_{\lambda y} & F_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}.$$

Dacă $\operatorname{rang}(m) = 2$ atunci din sistemul care dă curba discriminantă se pot explicita două dintre variabilele x, y, λ. De exemplu, dacă

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ F_{\lambda x} & F_{\lambda y} \end{vmatrix} \neq 0$$

atunci se pot explicita $x = x(\lambda), y = y(\lambda)$. Cum F_x, F_y nu pot fi simultan nule rezultă că discriminanta este înfăşurătoarea familiei. Dacă

$$\begin{vmatrix} F_x & F\lambda \\ F_{\lambda x} & F_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = F_x F_{\lambda\lambda} \neq 0$$

atunci se explicitează $x = x(y), \lambda = \lambda(y)$ şi cum $F_x \neq 0$ rezultă că $x = x(y)$ este ecuaţia înfăşurătoarei, iar $\lambda = \lambda(y)$ dă corespondenţa între punctele înfăşurătoarei şi curba familiei.

Dacă $\text{rang}(m) = 1$ şi $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$ atunci avem sistemul de patru ecuaţii cu trei necunoscute

$$\begin{aligned} F &= 0, \\ F\lambda &= 0, \\ \frac{F_{\lambda x}}{F_x} &= \frac{F_{\lambda y}}{F_y}, F_{\lambda\lambda} = 0 \end{aligned}$$

în general incompatibil şi deci curba discriminantă nu există . Dacă totuşi acest sistem este compatibil cu soluţii de forma $x = x(\lambda), y = y(\lambda)$ sau $x = x(y), \lambda = \lambda(y)$ sau $y = y(x), \lambda = \lambda(x)$ atunci oricare din acestea reprezintă înfăşurătoarea.

Dacă $\text{rang}(m) = 1$ şi $F_x^2 + F_y^2 = 0$ atunci avem un sistem de patru ecuaţii cu trei necunoscute

$$\begin{aligned} F &= 0, \\ F\lambda &= 0, \\ F_x &= 0, F_y = 0 \end{aligned}$$

în general incompatibil şi deci curba discriminantă nu există. Dacă totuşi acest sistem este compatibil cu soluţii de forma $x = x(\lambda), y = y(\lambda)$ sau $x = x(y), \lambda = \lambda(y)$ sau $y = y(x), \lambda = \lambda(x)$ atunci oricare din acestea reprezintă curba punctelor singulare ale familiei.

Exemplul 5.1.7.1 *Fie familia de parabole*

$$F(x, y, \lambda) = (x + \lambda)^2 - (y + \frac{\lambda^2}{2}) = 0, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Ca să găsim curba discriminantă derivăm în raport cu λ

$$F\lambda = 2(x+\lambda) - \lambda = 0.$$

Eliminând λ *avem*

$$x^2 + y = 0.$$

Pentru că fiecare parabolă din familie nu are puncte singulare, curba discriminantă este înfăşurătoare. De altfel matricea

$$m = \begin{pmatrix} 2(x+\lambda) & -1 & 2x+\lambda \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul 2.

Exemplul 5.1.7.2 *Ca să găsim discriminanta familiei de parabole semicubice*

$$F(x,y,\lambda) = (x+\lambda)^2 - (y+\lambda)^3 = 0, \lambda \in \mathbf{R}$$

derivăm

$$F\lambda = 2(x+\lambda) - 3(y+\lambda)^2 = 0.$$

Scoatem din a doua ecuaţie

$$x+\lambda = \frac{3}{2}(y+\lambda)^2$$

şi introducem în prima

$$\frac{9}{4}(y+\lambda)^4 - (y+\lambda)^3 = 0.$$

Avem situaţiile:

- $y+\lambda = 0$. Atunci $x+\lambda = 0$ şi deci $y - x = 0$. Aceasta este curba punctelor singulare pentru că $F_x = 0, F_y = 0$.
- $y+\lambda = \frac{4}{9}$ de unde $x+\lambda = \frac{8}{27}$ şi deci $x - y + \frac{4}{27} = 0$. Se verifică uşor că aceasta este înfăşurătoare.

Exemplul 5.1.7.3 *Pentru familia de parabole semicubice*

$$F(x,y,\lambda) = (x+\lambda)^2 - y^3 = 0, \lambda \in \mathbf{R}$$

avem

$$F\lambda = 2(x+\lambda) = 0$$

şi curba discriminantă este $y = 0$. *Se vede că ea este locul punctelor singulare.*

Să presupunem acum că familia de curbe este dată prin ecuaţiile

$$\begin{aligned} x &= x(t,\lambda), \\ y &= y(t,\lambda), t \in [t_1,t_2], \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2] \end{aligned}$$

unde t este parametrul care dă poziţia punctului pe curbă, iar λ dă curba din familie. Dacă ecuaţia înfăşurătoarei ar fi $f(x,y)=0$ am avea

$$f(x(t,\lambda),y(t,\lambda))=0$$

şi prin derivare în raport cu t respectiv λ vom avea

$$\begin{cases} f_x x_t + f_y y_t = 0, \\ f_x x\lambda + f_y y\lambda = 0. \end{cases}$$

Dacă punctul nu este singular $f_x^2+f_y^2 \neq 0$ rezultă

$$\begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x\lambda & y\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Deci curba discriminantă se găseşte prin eliminarea sau a lui t sau a lui λ sau a amândorura din ecuaţiile

$$\begin{cases} x = x(t,\lambda), \\ y = y(t,\lambda), \\ \begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x\lambda & y\lambda \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Aceasta poate conţine şi locul punctelor singulare ale familiei pentru că pe aceasta $x_t = y_t = 0$ şi a treia ecuaţie este verificată.

Exemplul 5.1.7.4 *Considerăm familia de drepte*

$$\begin{cases} x = \lambda + t\cos\lambda, \\ y = t\sin\lambda, (t,\lambda) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

Avem

$$\begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x\lambda & y\lambda \end{vmatrix} = t\cos^2\lambda - (1 - t\sin\lambda)\sin\lambda = 0$$

sau

$$u = \sin\lambda.$$

Eliminând t avem ecuaţiile parametrice ale infăşurătoarei

$$\begin{cases} x = \lambda + \sin\lambda\cos\lambda, \\ y = \sin^2\lambda \end{cases}$$

pentru că dreptele nu pot avea puncte singulare.

Şi o familie de curbe spaţiale parametrizate

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t,\lambda), \quad (t,\lambda) \in [t_1,t_2] \times [\lambda_1,\lambda_2]$$

poate avea o înfăşurătoare. Dacă $t_1(\lambda)$ este valoarea parametrului t corespunzătoare punctului unde curba de parametru λ este tangentă la înfăşurătoare, atunci ecuaţia înfăşurătoarei este

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(\lambda) = \overrightarrow{r}(t_1(\lambda),\lambda), \quad \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2].$$

Vectorul tangent la înfăşurătoare

$$\overrightarrow{\rho'}(\lambda) = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial t}(t_1(\lambda),\lambda) + \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\lambda}(t_1(\lambda),\lambda)$$

este colinear cu vectorul tangent la curba de parametru λ

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial t}(t_1(\lambda),\lambda)$$

şi deci

$$\overrightarrow{\rho'}(\lambda) \times \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial t}(t_1(\lambda),\lambda) = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\lambda}(t_1(\lambda),\lambda) \times \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial t}(t_1(\lambda),\lambda) = 0.$$

Rezultă că dacă există înfăşurătoarea familiei de curbe, atunci trebuie eliminat sau parametrul t sau parametrul λ între ecuaţiile

$$\begin{cases} \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t,\lambda), \\ \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\lambda}(t,\lambda) \times \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial t}(t,\lambda) = 0. \end{cases}$$

Dar în această curbă discriminantă este conţinută şi curba punctelor singulare ale familiei.

Exemplul 5.1.7.5 *Pentru a găsi înfăşurătoare familiei de drepte*

$$\overrightarrow{r} = R(\cos\lambda - t\sin\lambda)\overrightarrow{i} + R(\sin\lambda + t\cos\lambda)\overrightarrow{j} + h(\lambda + t)\overrightarrow{k}, (t,k) \in \mathbf{R}^2$$

calculăm

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t} = -R\sin\lambda\overrightarrow{i} + R\cos\lambda\overrightarrow{j} + h\overrightarrow{k},$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \lambda} = R(-\sin\lambda - t\cos\lambda)\overrightarrow{i} + R(\cos\lambda - t\sin\lambda)\overrightarrow{j} + h\overrightarrow{k},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \lambda} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -R\sin\lambda & R\cos\lambda & h \\ R(-\sin\lambda - t\cos\lambda) & R(\cos\lambda - t\sin\lambda) & h \end{vmatrix} = \\ &= Rht\sin\lambda\overrightarrow{i} - Rht\cos\lambda\overrightarrow{j} + R^2t\overrightarrow{k} = 0.\end{aligned}$$

Din ultima rezultă $t = 0$ şi deci înfăşurătoarea este elicea circulară

$$\overrightarrow{r} = R\cos\lambda\overrightarrow{i} + R\sin\lambda\overrightarrow{j} + h\lambda\overrightarrow{k}.$$

De altfel familia de drepte dată este familia tangentelor la această elice.

5.2 Geometria diferenţială a suprafeţelor

5.2.1 Suprafaţă parametrizată, suprafaţă de nivel constant

Definiţia 5.2.1 *Se numeşte suprafaţă parametrizată aplicaţia*

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{i} + y(u,v)\overrightarrow{j} + z(u,v)\overrightarrow{k} : D_{uv} \to E_3,$$

unde D_{uv} este un domeniu în planul variabilelor u, v. Mulţimea valorilor aplicaţiei $\overrightarrow{r}(D_{uv})$ este suportul suprafeţei parametrizate. Cel mai adesea confundăm suprafaţa parametrizată cu suportul său. u, v se numesc parametrii suprafeţei.

Ecuaţia

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v), (u,v) \in D_{uv}$$

se numeşte *ecuaţia vectorial parametrică a suprafeţei parametrizate.* Ecuaţiile

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \quad (u,v) \in D_{uv} \end{cases}$$

se numesc *ecuaţiile scalar parametrice ale suprafeţei parametrizate.*

Suprafaţa parametrizată se numeşte *netedă de ordinul k* dacă funcţia $\overrightarrow{r}(u,v)$ admite derivate parţiale de ordinul k continue. Vom nota derivatele parţiale indicial $\overrightarrow{r_u}(u,v)$, $\overrightarrow{r_v}(u,v)$, $\overrightarrow{r_{uu}}(u,v)$, $\overrightarrow{r_{uv}}(u,v)$, etc.

Dacă $\overrightarrow{r}(u_0,v_0)$ este un punct pe suprafaţă, ecuaţia

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v_0), (u,v_0) \in D_{uv}$$

este ecuaţia unei curbe parametrizate situată pe suprafaţa dată şi care trece prin punctul $\overrightarrow{r}(u_0,v_0)$. O vom nota prin C_{v_0}. La fel ecuaţia

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u_0,v), (u_0,v) \in D_{uv}$$

este ecuaţia unei curbe parametrizate situată pe suprafaţa dată şi care trece prin punctul $\overrightarrow{r}(u_0,v_0)$. O vom nota prin C_{u_0}. Prin fiecare punct de pe suprafaţă trece o singură curbă C_{u_0} şi o singură curbă C_{v_0}. Din acest motiv cele două familii de curbe de pe suprafaţă se numesc *familiile curbelor coordonate* sau *parametrice* ale suprafeţei parametrizate.

Exemplul 5.2.1.1 *Ecuaţia*

$$\overrightarrow{r} = u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j}, (u,v) \in unui \quad plan$$

este ecuaţia vectorial parametrică a planului xOy. Ecuaţiile scalar parametrice sunt

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 0, \quad (u,v) \in unui \quad plan \end{cases}$$

Curbele coordonate sunt verticalele $x = u_0$ *şi orizontalele* $y = v_0$.

Exemplul 5.2.1.2 *Ecuaţia*

$$\overrightarrow{r} = u\cos v\overrightarrow{i} + u\sin v\overrightarrow{j}, (u,v) \in [0,\infty) \times [0,2\pi)$$

este ecuaţia aceluiaşi plan Oxy, *u fiind raza polară şi v fiind unghiul polar. Acum curbele* $v = v_0$ *sunt razele care pleacă din origine, iar curbele* $u = u_0$ *sunt cercurile cu centrul în origine.*

Exemplul 5.2.1.3 *Ecuaţia*

$$\overrightarrow{r} = R\cos\frac{u}{R}\overrightarrow{i} + R\sin\frac{u}{R}\overrightarrow{j} + v\overrightarrow{k}, (u,v) \in [0, 2\pi R] \times \mathbf{R}$$

este ecuaţia vectorial parametrică a cilindrului circular drept

$$x^2 + y^2 = R^2$$

cum rezultă imediat din ecuaţiile scalar parametrice

$$\begin{cases} x = R\cos\frac{u}{R}, \\ y = R\sin\frac{u}{R}, \\ z = v, (u,v) \in [0, 2\pi R] \times \mathbf{R}. \end{cases}$$

Curbele coordonate $u = u_0$*, adică*

$$\begin{cases} x = R\cos\frac{u_0}{R}, \\ y = R\sin\frac{u_0}{R}, \\ z = v, v \in \mathbf{R} \end{cases}$$

sunt generatoarele cilindrului. Curbele coordonate $v = v_0$*, adică*

$$\begin{cases} x = R\cos\frac{u}{R}, \\ y = R\sin\frac{u}{R}, \\ z = v_0, \quad u \in [0, 2\pi R] \end{cases}$$

sunt cercurile paralele. Parametrul u *este abscisa curbilinie pe cercul paralel cu originea în planul* xOz*.*

Exemplul 5.2.1.4 *Ecuaţia*

$$\overrightarrow{r} = u\sin\alpha\cos v\overrightarrow{i} + u\sin\alpha\sin v\overrightarrow{j} + u\cos\alpha\overrightarrow{k}, (u,v) \in \mathbf{R} \times [0, 2\pi]$$

este ecuaţia vectorial parametrică a conului de rotaţie în jurul lui Oz *cu vârful în origine şi deschiderea* α

$$x^2 + y^2 - z^2\tan^2\alpha = 0$$

cum rezultă din ecuaţiile scalar parametrice

$$\begin{cases} x = u\sin\alpha\cos v, \\ y = u\sin\alpha\sin v, \\ z = u\cos\alpha, \quad (u,v) \in \mathbf{R} \times [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Curbele coordonate $u = u_0$ sunt cercurile paralele, iar curbele coordonate $v = v_0$ sunt generatoarele. Parametrul u reprezintă abscisa curbilinie cu originea în vârf pe generatoare, iar v este unghiul făcut de proiecţia vectorului de poziţie pe planul Oxy cu axa Ox.

Exemplul 5.2.1.5 *Ecuaţia*

$$\overrightarrow{r} = R\sin v\cos u\,\overrightarrow{i} + R\sin v\sin u\,\overrightarrow{j} + R\cos v\,\overrightarrow{k}, (u,v) \in [0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

este ecuaţia vectorial parametrică a sferei

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

cum rezultă din ecuaţiile scalar parametrice

$$\begin{cases} x = R\sin v\cos u, \\ y = R\sin v\sin u, \\ z = R\cos v, \quad (u,v) \in [0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Parametrii u, v sunt longitudinea respectiv colatitudinea şi deci curbele $u = u_0$ sunt meridianele, iar curbele $v = v_0$ sunt cercurile paralele.

Exemplul 5.2.1.6 *Ecuaţia*

$$\overrightarrow{r} = \rho(v)\cos u\,\overrightarrow{i} + \rho(v)\sin u\,\overrightarrow{j} + v\,\overrightarrow{k}, (u,v) \in [0,2\pi]\times\mathbf{R}$$

este ecuaţia vectorial parametrică a unei suprafeţe de rotaţie în jurul axei Oz care în coordonate cilindrice (ρ,θ,z) are ecuaţia $\rho = \rho(z)$. Aici v este cota punctului, iar u reprezintă unghiul făcut de proiecţia vectorului de poziţie pe planul Oxy cu axa Ox. Deci curbele coordonate $v = v_0$ sunt cercurile paralele, iar curbele coordonate $u = u_0$ sunt curbele meridian.

Ca un caz particular, dacă $\rho(z) = a\cosh\frac{z}{a}$, adică meridianele sunt lănţişoare, suprafaţa se numeşte *catenoid* (catena-lanţ lat.).

Exemplul 5.2.1.7 *Ecuaţia*

$$\overrightarrow{r} = u\cos v\,\overrightarrow{i} + u\sin v\,\overrightarrow{j} + av\,\overrightarrow{k}, (u,v) \in [0,2\pi]\times[0,\infty)$$

este ecuaţia vectorial parametrică a suprafeţei generate de o semidreaptă care se roteşte în jurul axei Oz rămânând paralelă cu planul Oxy şi ridicându-se proporţional cu unghiul de rotaţie. Suprafaţa se numeşte suprafaţă helicoidală sau helicoid. v reprezintă unghiul făcut de proiecţia semidreptei pe Oxy cu Ox, iar u reprezintă abscisa curbilinie pe o generatoare. Curbele coordonate $u = u_0$ sunt elice circulare, iar curbele $v = v_0$ sunt generatoare.

Exemplul 5.2.1.8 *Dacă $z = z(x, y)$ este o funcţie reală definită pe un domeniu D_{xy} din planul Oxy graficul acestei funcţii este o suprafaţă parametrizată cu ecuaţia vectorial parametrică*

$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z(x, y)\overrightarrow{k}, (x, y) \in D_{xy}$$

şi ecuaţiile scalar parametrice

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}. \end{cases}$$

In acest caz se zice că avem o suprafaţă dată explicit cu ecuaţia explicită $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$. Curbele coordonate sunt intersecţiile graficului cu planele verticale $x = x_0, y = y_0$.

Definiţia 5.2.2 *Suprafeţele parametrizate cu ecuaţiile vectorial parametrice*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{r}(u_1, v_1), (u_1, v_1) \in D_{u_1v_1}, \\ \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{\rho}(u_2, v_2), (u_2, v_2) \in D_{u_2v_2} \end{aligned}$$

se numesc echivalente dacă există aplicaţia bijectivă

$$\begin{cases} u_1 = u_1(u_2, v_2), \\ v_1 = v_1(u_2, v_2) \end{cases}$$

definită pe $D_{u_2v_2}$ cu valori în $D_{u_1v_1}$ astfel încât

$$\overrightarrow{\rho}(u_2, v_2) = \overrightarrow{r}(u_1(u_2, v_2), v_1(u_2, v_2)), \forall (u_2, v_2) \in D_{u_2v_2}.$$

In cazul suprafeţelor netede de ordinul k aplicaţia bijectivă se va considera cu derivate parţiale de ordinul k continue. Se verifică uşor că avem o relaţie de echivalenţă. Evident, suprafeţele parametrizate echivalente au acelaşi suport.

In cazul suprafeţei parametrizate netede de ordinul întâi $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v)$ curbele coordonate $C_{v_0} : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v_0)$, $C_{u_0} : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u_0, v)$ care trec prin punctul $\overrightarrow{r}(u_0, v_0)$ au vectorii tangenţi $\overrightarrow{r_u}(u_0, v_0)$, respectiv $\overrightarrow{r_v}(u_0, v_0)$.

Definiţia 5.2.3 *Punctul $\overrightarrow{r}(u_0, v_0)$ al suprafeţei parametrizate netede de ordinul întâi se numeşte punct ordinar dacă vectorii $\overrightarrow{r_u}(u_0, v_0), \overrightarrow{r_v}(u_0, v_0)$ sunt necolineari. In caz contrar punctul se numeşte singular.*

Se verifică uşor că punctele corespondente ale suprafeţelor parametrizate echivalente sunt simultan ordinare sau singulare.

Definiţia 5.2.4 *Se numeşte suprafaţă de nivel constant mulţimea punctelor de coordonate (x, y, z) care satisfac relaţia $F(x, y, z) = c$, unde $F(x, y, z)$ este o funcţie reală definită pe un domeniu din E_3, iar c este un număr real. Suprafaţa de nivel constant se numeşte netedă de ordinul k dacă funcţia $F(x, y, z)$ are derivate parţiale de ordinul k continue.*

Definiţia 5.2.5 *Punctul (x, y, z) al suprafeţei de nivel constant $F(x, y, z) = c$ netedă de ordinul întâi se numeşte punct ordinar dacă în acest punct gradientul funcţiei F* $\operatorname{grad} F(x, y, z) = \overrightarrow{\nabla} F(x, y, z) \neq 0$. *In caz contrar punctul se numeşte singular.*

Dacă (x, y, z) este un punct ordinar al suprafeţei de nivel constant $F(x, y, z) = c$ netedă de ordinul întâi, de exemplu derivata parţială $F_z(x, y, z) \neq 0$ atunci după teorema funcţiilor implicite există o vecinătate a punctului (x, y, z) în care variabila z se explicitează în funcţie de variabilele x, y, deci există funcţia $z = z(x, y)$ definită în acea vecinătate astfel încât $F(x, y, z(x, y)) = c$ pentru orice punct din acea vecinătate. Deci în vecinătatea respectivă suprafaţa de nivel constant se poate scrie ca o suprafaţă dată explicit, deci ca o suprafaţă parametrizată.

De multe ori, în cazul suprafeţelor de nivel constant, din considerente geometrice caracteristice suprafeţei respective putem găsi reprezentări parametrice diferite de cele date de teorema funcţiilor implicite. Este cazul sferei considerate mai sus.

5.2.2 Plan tangent, prima formă fundamentală

Dacă avem suprafaţa parametrizată

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{i} + y(u,v)\overrightarrow{j} + z(u,v)\overrightarrow{k} : D_{uv} \to E_3,$$

şi punctul său $\overrightarrow{r}(u_0, v_0)$, obţinem o curbă situată pe suprafaţă care trece prin acest punct dacă luăm parametrii u, v ca funcţii $u(t), v(t)$ de parametrul $t \in [t_1, t_2]$ astfel că $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$. Ecuaţia parametrică a acestei curbe este

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(t) = \overrightarrow{r}(u(t), v(t)), t \in [t_1, t_2].$$

Curba este netedă de ordinul k dacă suprafaţa este netedă de ordinul k şi funcţiile $u(t), v(t)$ au derivate de ordinul k continue. Vectorul tangent la această curbă în punctul ordinar $\overrightarrow{r}(u_0, v_0)$ este

$$\overrightarrow{\rho'}(t_0) = \overrightarrow{r_u}(u_0, v_0)u'(t_0) + \overrightarrow{r_v}(u_0, v_0)v'(t_0).$$

Deci toate curbele care trec prin punctul ordinar $\overrightarrow{r_v}(u_0, v_0)$ au tangentele în acest punct în planul care trece prin acest punct şi se sprijină pe vectorii $\overrightarrow{r_u}(u_0, v_0)$, $\overrightarrow{r_v}(u_0, v_0)$.

Definiţia 5.2.6 *Planul care trece prin punctul ordinar $\overrightarrow{r}(u_0, v_0)$ al suprafeţei parametrizate $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v)$ şi se sprijină pe vectorii $\overrightarrow{r_u}(u_0, v_0)$, $\overrightarrow{r_v}(u_0, v_0)$ se numeşte planul tangent la suprafaţă în acel punct.*

Observăm că orice vector din planul tangent se descompune după vectorii $\overrightarrow{r_u}(u_0, v_0)$, $\overrightarrow{r_v}(u_0, v_0)$. Aceşti vectori alcătuiesc o bază a vectorilor din planul tangent, vectorul tangent la curbă $\overrightarrow{\rho'}(t_0)$ având pe această bază componentele $u'(t_0)$, $v'(t_0)$.

Ecuaţia vectorială a planului tangent este

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}(u_0, v_0), \overrightarrow{r_u}(u_0, v_0), \overrightarrow{r_v}(u_0, v_0)) = 0,$$

iar ecuaţia scalară este

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Notând cu $A(u,v), B(u,v), C(u,v)$ minorii luaţi cu semnele alternând din matricea

$$\begin{pmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix},$$

ecuaţia planului tangent într-un punct curent se mai scrie

$$A(u,v)(x - x(u,v)) + B(u,v)(y - y(u,v)) + C(u,v)(z - z(u,v)) = 0.$$

Un vector normal la planul tangent este vectorul $\overrightarrow{r_u}(u_0,v_0) \times \overrightarrow{r_v}(u_0,v_0)$.

După teorema de la analiză se poate scrie

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}(u,v) &= \overrightarrow{r}(u_0,v_0) + \overrightarrow{r_u}(u_0,v_0)(u-u_0) + \overrightarrow{r_v}(u_0,v_0)(v-v_0) + \\ &+ o\left(\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}\right) \end{aligned}$$

De aici se poate arăta uşor că planul tangent în punctul $\overrightarrow{r}(u_0,v_0)$ este unicul plan care trece prin acest punct pentru care distanţa dela punctul $\overrightarrow{r}(u,v)$ al suprafeţei la plan este $o\left(\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}\right)$, adică este neglijabilă în raport cu $\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}$.

Dacă $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este un punct pe suprafaţa de nivel constant $F(x,y,z) = C$, $F(x_0,y_0,z_0) = C$ şi

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

sunt ecuaţiile parametrice ale unei curbe de pe suprafaţă care trece prin M_0, avem

$$F(x(t), y(t), z(t)) = C.$$

Derivând avem

$$F_x x'(t_0) + F_y y'(t_0) + F_z z'(t_0) = 0$$

derivatele parţiale fiind calculate în M_0. Rezultă că vectorul

$$\operatorname{grad} F = \overrightarrow{\nabla} F = F_x \overrightarrow{i} + F_y \overrightarrow{j} + F_z \overrightarrow{k}$$

este un vector normal la planul tangent la suprafaţă în punctul dat. Cum

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \operatorname{grad} F d\overrightarrow{r}$$

rezultă că vectorul grad F este dirijat în spre sensul de creştere al funcţiei F. Ecuaţia planului tangent la suprafaţa de nivel constant este

$$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0.$$

O abscisă curbilinie pe curba

$$\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(u(t),v(t)),t\in[t_1,t_2].$$

de pe suprafaţa parametrizată $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(u,v)$ este

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{(\overrightarrow{r_u}(u(t),v(t))u'(t)+\overrightarrow{r_v}(u(t),v(t))v'(t))^2}dt.$$

Notând

$$E(u,v)=\overrightarrow{r_u}(u,v)^2,F(u,v)=\overrightarrow{r_u}(u,v)\overrightarrow{r_v}(u,v),G(u,v)=\overrightarrow{r_v}(u,v)^2$$

avem

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{E(u(t),v(t)u'(t)^2+2F(u(t),v(t))u'(t)v'(t)+G(u(t),v(t))v'(t)^2}dt.$$

Cum $u'(t),v'(t)$ sunt componentele vectorului tangent la curbă în punctul $\overrightarrow{r}(u(t),v(t))$ după baza $\overrightarrow{r_u}(u(t),v(t)),\overrightarrow{r_v}(u(t),v(t))$ sub radical avem o formă pătratică pe spaţiul vectorial al vectorilor tangenţi în punctul $\overrightarrow{r}(u(t),v(t))$. Această formă pătratică se numeşte *prima formă pătratică a suprafeţei.*

Cum

$$\begin{aligned}ds(t)^2 &= s'(t)^2dt^2=\\ &= (E(u(t),v(t)u'(t)^2+2F(u(t),v(t))u'(t)v'(t)+G(u(t),v(t))v'(t)^2)dt^2=\\ &= E(u(t),v(t))du(t)^2+2F(u(t),v(t))du(t)dv(t)+G(u(t),v(t))dv(t)^2\end{aligned}$$

se scrie simplu

$$ds^2=E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)dv^2.$$

Cum

$$d\overrightarrow{r}(u,v)=\overrightarrow{r_u}(u,v)du+\overrightarrow{r_v}(u,v)dv$$

putem considera că $d\overrightarrow{r}(u,v)$ este un vector tangent la suprafaţă în punctul $\overrightarrow{r}(u,v)$ având pe baza $\overrightarrow{r_u}(u,v), \overrightarrow{r_v}(u,v)$ componentele du, dv. Putem încă scrie

$$ds^2 = d\overrightarrow{r}^2 = (\overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Prima formă fundamentală a suprafeţei este evident legată de proprietăţile metrice alte suprafeţei. Ea se numeşte şi *forma metrică a suprafeţei.* Am văzut că prin ea se exprimă abscisele curbilinii pe curbe şi deci lungimile arcelor de curbe. Să arătăm că şi unghiul dintre două curbe se poate exprima prin prima formă fundamentală. Fie două curbe care trec prin punctul $\overrightarrow{r}(u_0,v_0) : u = u_1(t), v = v_1(t)$ şi $u = u_2(t), v = v_2(t)$ astfel că $u_1(t_0) = u_2(t_0) = u_0$ şi $v_1(t_0) = v_2(t_0) = v_0$. Unghiul sub care se taie cele două curbe este unghiul θ dintre vectorii tangenţi

$$\overrightarrow{r_u}(u_0,v_0)u_1'(t_0) + \overrightarrow{r_v}(u_0,v_0)v_1'(t_0),$$
$$\overrightarrow{r_u}(u_0,v_0)u_2'(t_0) + \overrightarrow{r_v}(u_0,v_0)v_2'(t_0)$$

adică avem

$$\cos\theta = \frac{E_0u_{10}'u_{20}' + F_0(u_{10}'v_{20}' + u_{20}'v_{10}' + G_0v_{10}'v_{20}'}{\sqrt{E_0u_{10}'^2 + 2F_0u_{10}'v_{10}' + G_0v_{10}'^2}\sqrt{E_0u_{20}'^2 + 2F_0u_{20}'v_{20}' + G_0v_{20}'^2}}$$

unde pentru simplitatea scrierii am notat prin indicele 0 faptul că E, F, G sunt calculaţi pentru u_0, v_0, iar derivatele pentru t_0. Dacă notăm cu du, dv diferenţialele pe prima curbă şi cu $\delta u, \delta v$ diferenţialele pe a doua curbă, putem scrie

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta udv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$$

ne mai punând indicele 0. Condiţia de ortogonalitate a celor două curbe este deci

$$Edu\delta u + F(du\delta v + \delta udv) + Gdv\delta v = 0.$$

Pe curba coordonată $v = v_0$ avem $dv = 0$, în timp ce pe curba coordonată $u = u_0$ avem $\delta u = 0$ şi deci unghiul între cele două curbe este dat de

$$\cos\theta = \frac{F(u_0,v_0)}{\sqrt{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)}}.$$

Rezultă de aici că liniile coordonate se taie ortogonal dacă şi numai dacă în toate punctele suprafeţei $F(u,v) = 0$.

Definiţia 5.2.7 *Două suprafeţe parametrizate se numesc izometrice sau aplicabile una pe alta dacă între ele există o bijecţie astfel încât lungimile arcelor de curbă corespondente să fie egale.*

Este evidentă

Teorema 5.2.1 *Suprafeţele parametrizate cu ecuaţiile vectorial parametrice*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r} &= \overrightarrow{r_1}(u,v), (u,v) \in D_{uv},\\ \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{r_2}(u,v), (u,v) \in D_{uv}\end{aligned}$$

cu acelaşi domeniu al parametrilor sunt izometrice dacă şi numai dacă coeficienţii primelor forme fundamentale ale lor sunt egale în toate punctele corespondente

$$E_1(u,v) = E_2(u,v), F_1(u,v) = F_2(u,v), G_1(u,v) = G_2(u,v), \forall (u,v) \in D_{uv}.$$

Exemplul 5.2.2.1 *Suprafaţa parametrizată*

$$\overrightarrow{r} = u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j}, (u,v) \in unui \quad plan$$

este planul Oxy. Avem

$$\begin{aligned}d\overrightarrow{r} &= \overrightarrow{i}\,du + \overrightarrow{j}\,dv,\\ ds^2 &= du^2 + dv^2,\\ E(u,v) &= 1, F(u,v) = 0, G(u,v) = 1.\end{aligned}$$

Se confirmă prin $F = 0$ că verticalele şi orizontalele sunt ortogonale.

Exemplul 5.2.2.2 *Suprafaţa parametrizată*

$$\overrightarrow{r} = R\cos\frac{u}{R}\overrightarrow{i} + R\sin\frac{u}{R}\overrightarrow{j} + v\overrightarrow{k}, (u,v) \in [0, 2\pi R] \times \mathbf{R}$$

este cilindrul circular drept. Avem

$$\begin{aligned}d\overrightarrow{r} &= -\sin\frac{u}{R}\overrightarrow{i}\,du + \cos\frac{u}{R}\overrightarrow{j}\,du + \overrightarrow{k}\,dv,\\ ds^2 &= du^2 + dv^2,\\ E(u,v) &= 1, F(u,v) = 0, G(u,v) = 1\end{aligned}$$

Dacă restrângem domeniul de definiţie al planului la $[0, 2\pi R] \times \mathbf{R}$, adică din planul Oxy luăm numai o bandă verticală de lăţime $2\pi R$ cele două suprafeţe sunt aplicabile una pe alta. Se zice că cilindrul este o suprafaţă desfăşurabilă.

Exemplul 5.2.2.3 *Suprafaţa*

$$\overrightarrow{r} = v\cos u\,\overrightarrow{i} + v\sin u\,\overrightarrow{j}, (u,v) \in [0,2\pi) \times [0,\infty)$$

este planul Oxy raportat la coordonate polare, v fiind raza polară şi u unghiul polar. Avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_u} &= -v\sin u\,\overrightarrow{i} + v\cos u\,\overrightarrow{j}, E(u,v) = v^2,\\ \overrightarrow{r_v} &= \cos u\,\overrightarrow{i} + \sin u\,\overrightarrow{j}, F(u,v) = 0, G = 1\end{aligned}$$

Se confirmă că razele care pleacă din origine şi cercurile cu centrul în origine sunt ortogonale.

Exemplul 5.2.2.4 *Suprafaţa*

$$\overrightarrow{r} = v\sin\alpha\cos u\,\overrightarrow{i} + v\sin\alpha\sin u\,\overrightarrow{j} + v\cos\alpha\,\overrightarrow{k}, (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\infty)$$

este un con circular drept. Avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_u} &= -v\sin\alpha\sin u\,\overrightarrow{i} + v\sin\alpha\cos u\,\overrightarrow{j}, E(u,v) = v^2\sin^2\alpha,\\ \overrightarrow{r_v} &= \sin\alpha\cos u\,\overrightarrow{i} + \sin\alpha\sin u\,\overrightarrow{j} + \cos\alpha\,\overrightarrow{k}, F(u,v) = 0, G(u,v) = 1.\end{aligned}$$

Observăm că dacă am renota $v\sin\alpha$ cu v, coeficienţii primelor forme fundamentale ar coincide. Rezultă faptul evident din geometria elementară: conul este o suprafaţă desfăşurabilă.

Exemplul 5.2.2.5 *Suprafaţa parametrizată*

$$\overrightarrow{r} = a\cosh\frac{u}{a}\cos v\,\overrightarrow{i} + a\cosh\frac{u}{a}\sin v\,\overrightarrow{j} + u\,\overrightarrow{k}, (u,v) \in \mathbf{R} \times [0,2\pi]$$

este catenoidul. Avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_u} &= \sinh\frac{u}{a}\cos v\,\overrightarrow{i} + \sinh\frac{u}{a}\sin v\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, E(u,v) = \cosh^2\frac{u}{a},\\ \overrightarrow{r_v} &= -a\cosh\frac{u}{a}\sin v\,\overrightarrow{i} + a\cosh\frac{u}{a}\cos v\,\overrightarrow{j}, F(u,v) = 0, G(u,v) = a^2\cosh^2\frac{u}{a}.\end{aligned}$$

$$ds^2 = \cosh^2\frac{u}{a}(du^2 + a^2dv^2).$$

Exemplul 5.2.2.6 *Suprafaţa*

$$\overrightarrow{r} = u\cos v\overrightarrow{i} + u\sin v\overrightarrow{j} + av\overrightarrow{k}, (u,v) \in [0,\infty) \times [0,2\pi]$$

este un helicoid. Avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_u} &= \cos v\overrightarrow{i} + \sin v\overrightarrow{j}, E(u,v) = 1,\\ \overrightarrow{r_v} &= -u\sin v\overrightarrow{i} + u\cos v\overrightarrow{j} + a\overrightarrow{k}, F(u,v) = 0, G(u,v) = u^2 + a^2.\end{aligned}$$

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

Dacă aici am pune $u = a\sinh\frac{u'}{a}$ *am avea*

$$ds^2 = \cosh^2\frac{u'}{a}du'^2 + (a^2\sinh^2\frac{u'}{a} + a^2)dv^2 = \cosh^2\frac{u'}{a}(du'^2 + a^2dv^2)$$

adică, lucru surprinzător, helicoidul şi catenoidul sunt suprafeţe aplicabile una pe alta.

Proprietăţile unei suprafeţe care nu se modifică prin aplicarea ei pe altă suprafaţă, deci cele care se exprimă prin prima formă fundamentală a suprafeţei, constituie *geometria intrinsecă a suprafeţei.* Celelalte proprietăţi ţin de *geometria exterioară a suprafeţei.*

Am arătat că vectorul $\overrightarrow{r_u}(u,v) \times \overrightarrow{r_v}(u,v)$ este un vector normal la planul tangent suprafeţei în punctul $\overrightarrow{r}(u,v)$. Mărimea acestui vector este după formula lui Lagrange

$$|\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}| = \sqrt{(\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})^2} = \sqrt{\overrightarrow{r_u}^2\overrightarrow{r_v}^2 - (\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v})^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Versorul

$$\overrightarrow{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}$$

este *versorul normalei la suprafaţă.* In funcţie de coordonatele scalare $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, cu notaţia de mai sus se poate scrie

$$\overrightarrow{n}(u,v) = \frac{A(u,v)\overrightarrow{i} + B(u,v)\overrightarrow{j} + C(u,v)\overrightarrow{k}}{\sqrt{A(u,v)^2 + B(u,v)^2 + C(u,v)^2}}.$$

In acest fel vectorii $\overrightarrow{r_u}(u,v), \overrightarrow{r_v}(u,v), \overrightarrow{n}(u,v)$ alcătuiesc o bază a spaţiului orientată la dreapta. Atunci vectorii $\overrightarrow{r_u}(u,v), \overrightarrow{r_v}(u,v)$ formează o bază a planului tangent care trebuie considerată orientată drept. Vom observa că dacă suprafaţa este netedă de ordinul întâi, versorul $\overrightarrow{n}(u,v)$ este continuu. Se zice că suprafaţa parametrizată netedă de ordinul întâi este *orientată.* Există suprafeţe, în sensul pe care îl dăm în mod obişnuit

noţiunii de suprafaţă, deci nu suprafaţă parametrizată sau suprafaţă de nivel constant, care nu pot fi orientate. Cel mai simplu exemplu este al aşa numitei benzi a lui Möbius care se obţine dintr-un dreptunghi prin lipirea a două laturi opuse după ce s-a răsucit odată.

Dacă pe suprafaţa parametrizată $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v), (u,v) \in D_{uv}$ considerăm punctele corespunzătoare perechilor de valori

$$(u,v), (u+du,v), (u+du,v+dv), (u,v+dv)$$

adică de vectori de poziţie

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{r}(u,v), \\ \overrightarrow{r}(u+du,v) &= \overrightarrow{r}(u,v) + \overrightarrow{r_u}du + o(du), \\ \overrightarrow{r}(u+du,v+dv) &= \overrightarrow{r}(u,v) + \overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv + o(\sqrt{du^2+dv^2}), \\ \overrightarrow{r}(u,v+dv) &= \overrightarrow{r}(u,v) + \overrightarrow{r_v}dv + o(dv) \end{aligned}$$

ele formează un paralelogram curbiliniu cu laturile $\overrightarrow{r_u}du + o(du)$, $\overrightarrow{r_v}dv + o(dv)$, paralelogram care se abate foarte puţin de la planul tangent. Aria acestui paralelogram

$$d\sigma = |\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|dudv = \sqrt{EG-F^2}dudv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$$

se numeşte *aria elementară sau elementul de arie* al suprafeţei parametrizate în punctul $\overrightarrow{r}(u,v)$. După modul de aplicare a integralei duble, rezultă că prin *aria suprafeţei parametrizate* trebuie să înţelegem numărul

$$A = \iint_{D_{uv}} d\sigma = \iint_{D_{uv}} \sqrt{EG-F^2}dudv = \iint_{D_{uv}} \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv.$$

Uneori se consideră *vectorul arie elementară* definit prin

$$d\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{n}d\sigma = \overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}dudv.$$

In funcţie de componentele scalare se poate scrie

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{\sigma} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = \\ &= \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\overrightarrow{i} + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\overrightarrow{j} + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\overrightarrow{k} \right) dudv = \\ &= \left(A(u,v)\overrightarrow{i} + B(u,v)\overrightarrow{j} + C(u,v)\overrightarrow{k} \right) dudv. \end{aligned}$$

Se mai notează

$$d\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{n}d\sigma = dydz\overrightarrow{i} + dzdx\overrightarrow{j} + dxdy\overrightarrow{k}.$$

In cazul suprafeţei date explicit $z = z(x, y)$ avem

$$d\overrightarrow{\sigma} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy = (-\frac{\partial z}{\partial x}\overrightarrow{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})dxdy$$

şi

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

5.2.3 Triedrul geodezic, formulele lui Darboux

Pe suprafaţa parametrizată $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v), (u, v) \in D_{uv}$ considerăm o curbă oarecare cu parametrul o abscisă curbilinie

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{r}(u(s), v(s)), s \in [s_1, s_2].$$

Intr-un punct curent al curbei considerăm alături de baza lui Frenét $\overrightarrow{\tau}(s), \overrightarrow{\nu}(s), \overrightarrow{\beta}(s)$ baza

$$\overrightarrow{\tau}(s), \overrightarrow{n}(s) = \frac{\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}}{|\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{r}|}, \overrightarrow{g}(s) = \overrightarrow{\tau}(s) \times \overrightarrow{n}(s).$$

$\overrightarrow{n}(s)$ fiind versorul normalei la suprafaţă, versorul $\overrightarrow{g}(s)$ este un versor normal la curbă situat în planul tangent al suprafeţei. El se numeşte *versorul normalei geodezice.*

Definiţia 5.2.8 *Baza $\overrightarrow{\tau}(s), \overrightarrow{n}(s), \overrightarrow{g}(s)$ se numeşte baza geodezică sau baza lui Darboux. Triedrul cu vârful în punctul dat cu muchiile dirijate după baza geodezică se numeşte triedrul geodezic sau triedrul lui Darboux.*

Toţi vectorii $\overrightarrow{\nu}(s), \overrightarrow{\beta}(s), \overrightarrow{n}(s), \overrightarrow{g}(s)$ sunt perpendiculari pe $\overrightarrow{\tau}(s)$, adică sunt paraleli cu planul normal la curbă. Notăm cu $\theta(s)$ unghiul convex dintre $\overrightarrow{\nu}(s)$ şi $\overrightarrow{n}(s)$. Cum triedrul lui Frenét are viteza de rotaţie instantanee

$$\overrightarrow{\omega}(s) = C(s)\overrightarrow{\beta}(s) + T(s)\overrightarrow{\tau}(s)$$

şi triedrul lui Darboux are faţă de triedrul lui Frenét viteza de rotaţie instantanee $\theta'(s)\overrightarrow{\tau}(s)$, rezultă că triedrul lui Darboux are viteza de rotaţie

$$\overrightarrow{\Omega}(s) = \overrightarrow{\omega}(s) + \theta'(s)\overrightarrow{\tau}(s) = C(s)\overrightarrow{\beta}(s) + (T(s) + \theta'(s))\overrightarrow{\tau}(s).$$

Avem

$$\overrightarrow{\beta}(s) = \sin\theta(s)\overrightarrow{n}(s) + \cos\theta(s)\overrightarrow{g}(s)$$

şi deci viteza de rotaţie a triedrului geodezic este

$$\overrightarrow{\Omega}(s) = (T(s) + \theta'(s))\overrightarrow{\tau}(s) + C(s)\sin\theta(s)\overrightarrow{n}(s) + C(s)\cos\theta(s)\overrightarrow{g}(s).$$

Rezultă că au loc relaţiile lui Darboux

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\tau'}(s) &= \overrightarrow{\Omega}(s) \times \overrightarrow{\tau}(s) = && C_n(s)\overrightarrow{n}(s) - C_g(s)\overrightarrow{g}(s),\\
\overrightarrow{n'}(s) &= \overrightarrow{\Omega}(s) \times \overrightarrow{n}(s) = -C_n(s)\overrightarrow{\tau}(s) + && T_g(s)\overrightarrow{g}(s),\\
\overrightarrow{g'}(s) &= \overrightarrow{\Omega}(s) \times \overrightarrow{g}(s) = C_g(s)\overrightarrow{\tau}(s) - T_g(s)\overrightarrow{n}(s)
\end{aligned}$$

unde am notat

$$\begin{aligned}
C_g(s) &= C(s)\sin\theta(s),\\
C_n(s) &= C(s)\cos\theta(s),\\
T_g(s) &= T(s) + \theta'(s).
\end{aligned}$$

Definiţia 5.2.9 *$C_g(s)$ se numeşte curbura geodezică a curbei în punctul dat, $C_n(s)$ se numeşte curbura normală a curbei şi $T_g(s)$ se numeşte torsiunea geodezică a curbei.*

5.2.4 Curbura normală, a doua formă fundamentală

Din prima formulă a lui Darboux

$$\overrightarrow{\tau'}(s) = C_n(s)\overrightarrow{n}(s) - C_g(s)\overrightarrow{g}(s)$$

rezultă $C_n(s) = \overrightarrow{\tau'}(s)\overrightarrow{n}(s)$. Dar

$$\overrightarrow{\tau'}(s) = \overrightarrow{\rho''}(s) = \overrightarrow{r_{uu}}u'(s)^2 + 2\overrightarrow{r_{uv}}u'(s)v'(s) + \overrightarrow{r_{vv}}v'(s)^2 + \overrightarrow{r_u}u''(s) + \overrightarrow{r_v}v''(s).$$

Deci

$$C_n(s) = \overrightarrow{r_{uu}}\,\overrightarrow{n}\,u'(s)^2 + 2\overrightarrow{r_{uv}}\,\overrightarrow{n}\,u'(s)v'(s) + \overrightarrow{r_{vv}}\,\overrightarrow{n}\,v'(s)^2$$

sau notând

$$L(u,v) = \overrightarrow{r_{uu}}\,\overrightarrow{n}, M(u,v) = \overrightarrow{r_{uv}}\,\overrightarrow{n}, N(u,v) = \overrightarrow{r_{vv}}\,\overrightarrow{n}$$

$$C_n(s) = L(u(s),v(s))u'(s)^2 + 2M(u(s),v(s))u'(s)v'(s) + N(u(s),v(s))v'(s)^2.$$

In diferenţiale putem scrie

$$C_n(s)ds^2 = d\overrightarrow{\tau}\,\overrightarrow{n} = d^2\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{n} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Având în vedere că $\overrightarrow{\tau}\,\overrightarrow{n} = 0$, prin diferenţiere rezultă $d\overrightarrow{\tau}\,\overrightarrow{n} + \overrightarrow{\tau}\,d\overrightarrow{n} = 0$ şi deci a doua formă fundamentală se mai scrie

$$C_n ds^2 = -d\overrightarrow{r}\,d\overrightarrow{n} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2;$$

coeficienţii săi se mai scriu

$$L = -\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{n_u}, M = -\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{n_v} = -\overrightarrow{r_v}\,\overrightarrow{n_u}, N = -\overrightarrow{r_v}\,\overrightarrow{n_v}.$$

Pentru o curbă cu parametrul t oarecare $u = u(t), v = v(t)$ curbura normală este

$$C_n(t) = \frac{L(u(t),v(t))u'(t)^2 + 2M(u(t),v(t))u'(t)v'(t) + N(u(t),v(t))v'(t)^2}{E(u(t),v(t))u'(t)^2 + 2F(u(t),v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t),v(t))v'(t)^2}.$$

Această formulă se numeşte *formula lui Meusnier*. Observăm că la numitor a apărut prima formă fundamentală, iar la numărător a apărut *a doua formă fundamentală*, tot o formă pătratică definită pe spaţiul vectorilor tangenţi la suprafaţă în punctul $\overrightarrow{r}(u(t),v(t))$.

Cum vectorul tangent la suprafaţă $\overrightarrow{r_u}(u,v)u'(t)+\overrightarrow{r_v}(u,v)v'(t)$ este vector tangent la o mulţime de curbe care trec prin acest punct, pentru toate aceste curbe curbura normală este aceeaşi. Vom spune că vectorul tangent $\overrightarrow{r_u}(u,v)u'(t) + \overrightarrow{r_v}(u,v)v'(t)$ defineşte o direcţie în planul tangent al punctului.

Teorema 5.2.2 *Toate curbele care trec printr-un punct al suprafeţei şi au aceeaşi tangentă au aceeaşi curbură normală.*

Prin definiţie, curbura normală este $C_n(t) = C(t)\cos\theta(t)$ unde $C(t)$ este curbura curbei, iar $\theta(t)$ este unghiul dintre normala principală $\overrightarrow{\nu}(t)$ a curbei şi normala $\overrightarrow{n}(t)$ la suprafaţă în punctul respectiv. Dacă $\theta(t) = 0$ sau $\theta(t) = \pi$, adică direcţia normalei principale coincide cu direcţia normalei la suprafaţă, atunci $C_n(t) = \pm C(t)$, ceea ce justifică numele de curbură normală. Deci curbura normală este curbura curbei de intersecţie dintre suprafaţă şi secţiunea normală, adică planul care conţine pe $\overrightarrow{\tau}(t)$ şi

$\overrightarrow{n}(t)$. Fie $R_n(t)$ raza de curbură a curbei secţiunii normale şi $R(t)$ raza de curbură a curbei cu normala principală $\overrightarrow{\nu}(t)$. Avem

$$\frac{1}{R_n(t)} = \frac{1}{R(t)} \cos\theta(t)$$

sau

$$R(t) = R_n(t)\cos\theta(t).$$

Are loc

Teorema 5.2.3 *Proiecţia centrului de curbură al secţiunii normale pe planul osculator al unei curbe cu aceeaşi tangentă coincide cu centrul de curbură al acestei curbe.*

5.2.5 Semnificaţia geometrică a celei de a doua forme fundamentale

Fie suprafaţa parametrizată $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v), (u,v) \in D_{uv}$. Putem scrie

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{r}(u+du, v+dv) - \overrightarrow{r}(u,v) \\ = \; & \overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv + \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_{uu}}du^2 + 2\overrightarrow{r_{uv}}dudv + \overrightarrow{r_{vv}}dv^2) + \\ & +o(\sqrt{du^2+dv^2}) \end{aligned}$$

Dacă notăm

$$\overrightarrow{r}(u+du, v+dv) - \overrightarrow{r}(u,v) = X\overrightarrow{r_u} + Y\overrightarrow{r_v} + Z\overrightarrow{n}$$

avem

$$X = du, Y = dv, Z = \frac{1}{2}(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2) + o(\sqrt{du^2+dv^2})$$

sau lăsând la o parte termenii neglijabili

$$Z = \frac{1}{2}(LX^2 + 2MXY + NY^2).$$

Rezultă că a doua formă fundamentală ne arată cât iese suprafaţa din planul tangent. Mai precis:

- dacă forma a doua fundamentală este pozitiv definită, atunci în vecinătatea punctului suprafaţa poate fi aproximată cu un paraboloid eliptic; punctul se numeşte *eliptic*;

- dacă a doua formă fundamentală este nedegenerată (ambele valori proprii sunt nenule) dar nu este pozitiv definită, atunci suprafaţa poate fi aproximată cu un paraboloid hiperbolic; punctul se numeşte *hiperbolic*;

- dacă a doua formă fundamentală este degenerată suprafaţa poate fi aproximată cu un cilindru parabolic; punctul se numeşte *parabolic*;

- dacă a doua formă fundamentală este nulă, suprafaţa poate aproximată local cu un plan; punctul se numeşte *planar*.

5.2.6 Direcţii principale, curburi principale, linii principale

Pe planul tangent al unui punct de pe suprafaţa parametrizată $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v)$ avem două forme pătratice care pe baza $\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}$ pentru vectorul tangent $d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv$ au expresiile

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{r}^2 &= p_1(du,dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \\ d^2\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{n} &= -d\overrightarrow{r}\,d\overrightarrow{n} = p_2(du,dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2. \end{aligned}$$

Prima formă fundamentală fiind pozitiv definită, există o bază ortonormată $\overrightarrow{e_1}(u,v)$, $\overrightarrow{e_2}(u,v)$ a planului tangent formată din vectori proprii ai celei de a doua forme pătratice astfel că dacă $\overrightarrow{e_1}(u,v)\xi_1 + \overrightarrow{e_2}(u,v)\xi_2$ este un vector tangent, expresiile celor două forme pătratice pentru acest vector sunt

$$\begin{aligned} p_1(\xi_1,\xi_2) &= \xi_1^2 + \xi_2^2, \\ p_1(\xi_1,\xi_2) &= C_1\xi_1^2 + C_2\xi_2^2. \end{aligned}$$

C_1, C_2 sunt valorile proprii ale celei de a doua forme pătratice. Evident C_1, C_2 sunt curburile normale ale secţiunilor normale care conţin pe $\overrightarrow{e_1}(u,v)$, $\overrightarrow{e_2}(u,v)$.

Definiţia 5.2.10 *Direcţiile din planul tangent al unui punct definite de vectorii proprii ai celei de a doua forme pătratice se numesc direcţiile principale ale punctului. Curburile secţiunilor normale care conţin direcţiile principale se numesc curburile principale ale punctului.*

Dacă $\overrightarrow{e_1}(u,v)\cos\theta + \overrightarrow{e_2}(u,v)\sin\theta$ este un versor din planul tangent, curbura normală a secţiunii normale care îl conţine este

$$C_n = C_1\cos^2\theta + C_2\sin^2\theta = \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{C_1 - C_2}{2}\cos 2\theta.$$

Din această formulă, numită *formula lui Euler*, rezultă că valorile extreme (maximă-minimă) ale curburilor normale din punctul dat coincid cu cele două curburi principale.

Curburile principale, fiind valorile proprii ale celei de a doua forme pătratice, sunt date de ecuaţia

$$\begin{vmatrix} L - CE & M - CF \\ M - CF & N - CG \end{vmatrix} = 0$$

sau, scrisă dezvoltat

$$C^2(EG - F^2) - C(EN + LG - 2MF) + (LN - M^2) = 0.$$

Definiţia 5.2.11 *Produsul $K = C_1C_2$ al curburilor principale se numeşte curbura totală sau curbura lui Gauss a suprafeţei în punctul respectiv; media $H = \frac{C_1+C_2}{2}$ a curburilor principale se numeşte curbura medie a suprafeţei în punctul respectiv.*

Din relaţiile de mai sus avem

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, H = \frac{EN + LG - 2MF}{2(EG - F^2)}.$$

Dacă $\overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv$ este o direcţie principală, trebuie să avem

$$\begin{pmatrix} L - CE & M - CF \\ M - CF & N - CG \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{aligned} Ldu + Mdv - C(Edu + Fdv) &= 0, \\ Mdu + Ndv - C(Fdu + Gdv) &= 0 \end{aligned}$$

sau eliminând C

$$\begin{vmatrix} Ldu + Mdv & Edu + Fdv \\ Mdu + Ndv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0$$

sau încă, sub o formă mnenotehnică

$$\begin{vmatrix} -dv^2 & dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că dacă

$$\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}$$

atunci orice direcţie este principală şi $C_1 = C_2$, altfel există două direcţii principale.

Definiţia 5.2.12 *Se numeşte linie de curbură curba de pe suprafaţă care în fiecare punct al său este tangentă unei direcţii principale.*

Ecuaţia de mai sus dă ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de curbură. Dacă curbele coordonate sunt linii de curbură atunci şi numai atunci avem $F = M = 0$.

Exemplul 5.2.6.1 *Considerăm planul Oxy fie cu parametrii cartezieni*

$$\overrightarrow{r} = u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j}, (u, v) \in unui \quad plan$$

fie cu parametrii polari

$$\overrightarrow{r} = v\cos u\overrightarrow{i} + v\sin u\overrightarrow{j}, (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \infty).$$

In ambele cazuri $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}$ *şi* $L = \overrightarrow{r}\overrightarrow{n} = 0$, $M = \overrightarrow{r}\overrightarrow{n} = 0$, $N = \overrightarrow{r}\overrightarrow{n} = 0$. *Rezultă că în plan a doua formă fundamentală este nulă în orice punct al planului, adică curbura oricărei secţiuni normale este nulă în orice punct. Proprietatea este caracteristică planului pentru că din celelalte expresii*

$$L = -\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{n_u} = 0, M = -\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{n_v} = -\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{n_u} = 0, N = -\overrightarrow{r_v}\overrightarrow{n_v} = 0$$

rezultă $\overrightarrow{n_u} = \overrightarrow{n_v} = 0$ *şi deci* $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n_0} = const$. *Dacă* $\overrightarrow{r_0}$ *este vectorul de poziţie al unui punct al suprafeţei, pentru un punct oarecare al suprafeţei* $\overrightarrow{r_v}$ *avem*

$$((\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})\overrightarrow{n})_u = \overrightarrow{r_u}\overrightarrow{n} = 0, ((\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})\overrightarrow{n})_v = \overrightarrow{r_v}\overrightarrow{n} = 0$$

şi deci $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})\overrightarrow{n} = 0$, *adică suprafaţa este un plan.*

Exemplul 5.2.6.2 *Considerăm sfera*

$$\overrightarrow{r} = R\sin v\cos u\,\overrightarrow{i} + R\sin v\sin u\,\overrightarrow{j} + R\cos v\,\overrightarrow{k}, (u,v) \in [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Avem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_u} &= -R\sin v\sin u\,\overrightarrow{i} + R\sin v\cos u\,\overrightarrow{j},\\ \overrightarrow{r_v} &= R\cos v\cos u\,\overrightarrow{i} + R\cos v\sin u\,\overrightarrow{j} - R\sin v\,\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned}E &= R^2\sin^2 v, F = 0, G = R^2,\\ \overrightarrow{n} &= -\sin v\cos u\,\overrightarrow{i} - \sin v\sin u\,\overrightarrow{j} - \cos v\,\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

Mai departe

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_{uu}} &= -R\sin v\cos u\,\overrightarrow{i} - R\sin v\sin u\,\overrightarrow{j},\\ \overrightarrow{r_{uv}} &= -R\cos v\sin u\,\overrightarrow{i} + R\cos v\cos u\,\overrightarrow{j},\\ \overrightarrow{r_{vv}} &= -R\sin v\cos u\,\overrightarrow{i} - R\sin v\sin u\,\overrightarrow{j} - R\cos v\,\overrightarrow{k},\end{aligned}$$

$$L = \overrightarrow{r_{uu}}\,\overrightarrow{n} = R\sin^2 v, M = \overrightarrow{r_{uv}}\,\overrightarrow{n} = 0, N = \overrightarrow{r_{vv}}\,\overrightarrow{n} = R$$

adică

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = \frac{1}{R}$$

adică curbura secţiunii normale a oricărei curbe de pe sferă este $\frac{1}{R}$. Să arătăm că această proprietate este caracteristică sferei. Din relaţiile de mai sus rezultă

$$\begin{aligned}L &= -\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{n_u} = \frac{1}{R}E = \frac{1}{R}\overrightarrow{r_u}^2,\\ M &= -\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{n_v} = -\overrightarrow{r_v}\,\overrightarrow{n_u} = \frac{1}{R}F = \frac{1}{R}\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v},\\ N &= -\overrightarrow{r_v}\,\overrightarrow{n_v} = \frac{1}{R}G = \frac{1}{R}\overrightarrow{r_v}^2\end{aligned}$$

şi de aici

$$\overrightarrow{n_u} + \frac{1}{R}\overrightarrow{r_u} = 0, \overrightarrow{n_v} + \frac{1}{R}\overrightarrow{r_v} = 0$$

adică vectorul $\overrightarrow{n} + \frac{1}{R}\overrightarrow{r}$ este constant pe suprafaţă, să notăm constanta cu $\frac{1}{R}\overrightarrow{r_0}$. Rezultă $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = R\overrightarrow{n}$ sau $|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}| = R$, suprafaţa este o sferă.

Exemplul 5.2.6.3 *Considerăm suprafaţa de rotaţie în jurul lui Oz*

$$\overrightarrow{r} = \rho(v)\cos u\,\overrightarrow{i} + \rho(v)\sin u\,\overrightarrow{j} + v\,\overrightarrow{k}, (u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbf{R}.$$

Avem

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r_u} &= -\rho(v)\sin u\,\overrightarrow{i} + \rho(v)\cos u\,\overrightarrow{j}, \\
\overrightarrow{r_v} &= \rho'(v)\cos u\,\overrightarrow{i} + \rho'(v)\sin u\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \\
E &= \rho^2(v), F = 0, G = 1 + \rho'^2(v), \\
\overrightarrow{n} &= \frac{\cos u\,\overrightarrow{i} + \sin u\,\overrightarrow{j} - \rho'(v)\,\overrightarrow{k}}{(1+\rho'^2(v))^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Mai departe

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r_{uu}} &= -\rho(v)\cos u\,\overrightarrow{i} - \rho(v)\sin u\,\overrightarrow{j}, \\
\overrightarrow{r_{uv}} &= -\rho'(v)\sin u\,\overrightarrow{i} + \rho'(v)\cos u\,\overrightarrow{j}, \\
\overrightarrow{r_{vv}} &= \rho''(v)\cos u\,\overrightarrow{i} + \rho''(v)\sin u\,\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

şi deci

$$L = \overrightarrow{r_{uu}}\,\overrightarrow{n} = -\frac{\rho(v)}{(1+\rho'^2(v))^{1/2}}, M = 0, N = \frac{\rho''(v)}{(1+\rho'^2(v))^{1/2}}.$$

Deci liniile parametrice sunt linii principale. Secţiunea normală în direcţia liniei v este o curbă meridian. Secţiunea normală în direcţia liniei u este o curbă care poate coincide cu cercul paralel numai dacă normala la suprafaţă este perpendiculară pe Oz. Cum centrul de curbură al cercului paralel este pe axa de rotaţie şi cum centrul de curbură al secţiunii normale se proiectează pe centrul cercului paralel, rezultă că şi centrul de curbură al secţiunii normale se află tot pe axa de rotaţie. Ecuaţia care dă curburile principale este

$$\left(-\frac{\rho(v)}{(1+\rho'(v)^2)^{1/2}} - C\rho^2(v)\right)\left(\frac{\rho''(v)}{(1+\rho'(v)^2)^{1/2}} - C(1+\rho'(v)^2)\right) = 0$$

şi deci

$$C_1 = -\frac{1}{\rho(v)(1+\rho'(v)^2)^{1/2}}, C_2 = \frac{\rho''(v)}{(1+\rho'(v)^2)^{3/2}}.$$

Rezultă curbura totală

$$K = C_1C_2 = -\frac{\rho''(v)}{\rho(v)(1+\rho'(v)^2)^2}$$

şi curbura medie

$$H = \frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{\rho(v)\rho''(v) - (1 + \rho'(v)^2)}{\rho(v)(1 + \rho'(v)^2)^{3/2}}.$$

Curbura totală este pozitivă în punctele pentru care $\rho''(v) < 0$, *adică în punctele în care concavitatea curbei meridian este îndreptată spre axa de rotaţie şi este negativă în punctele în care* $\rho''(v) > 0$, *adică în punctele în care concavitatea curbei meridian este opusă axei de rotaţie.*

Suprafeţele de rotaţie care au curbura totală nulă peste tot sunt cele pentru care $\rho(z) = az + b$, adică conurile de rotaţie pentru $a \neq 0$ şi cilindrii de rotaţie pentru $a = 0$.

Ca să găsim suprafeţele de rotaţie cu curbura medie nulă trebuie să rezolvăm ecuaţia

$$\rho(v)\rho''(v) - (1 + \rho'(v)^2) = 0.$$

Punând $\rho'(v) = \varphi(\rho)$ avem $\rho''(v) = \varphi'(\rho)\rho'(v) = \varphi'(\rho)\varphi(\rho)$ şi avem ecuaţia

$$\rho\varphi\varphi' = 1 + \varphi^2$$

sau

$$\frac{\varphi d\varphi}{1 + \varphi^2} = \frac{d\rho}{\rho}.$$

Găsim $\varphi(\rho) = \rho'(v) = \sqrt{C^2\rho^2 - 1}$ şi punând $C\rho = \cosh t, C d\rho = \sinh t dt$ avem $dt = C dv$, adică $t = C(v - v_0)$ sau

$$\rho = \frac{1}{C}\cosh C(v - v_0),$$

adică suprafaţa de rotaţie cu curbura medie nulă este catenoidul.

Exemplul 5.2.6.4 *Considerăm helicoidul*

$$\overrightarrow{r} = u\cos v\,\overrightarrow{i} + u\sin v\,\overrightarrow{j} + av\,\overrightarrow{k}, (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \infty).$$

Avem

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r_u} &= \cos v\,\overrightarrow{i} + \sin v\,\overrightarrow{j}, \\
\overrightarrow{r_v} &= -u\sin v\,\overrightarrow{i} + u\cos v\,\overrightarrow{j} + a\,\overrightarrow{k}, \\
\overrightarrow{n} &= \frac{a\sin v\,\overrightarrow{i} - a\cos v\,\overrightarrow{j} + u\,\overrightarrow{k}}{(a^2 + u^2)^{1/2}}
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{r_{uu}} = 0, \overrightarrow{r_{uv}} = -\sin v \overrightarrow{i} + \cos v \overrightarrow{j}, \overrightarrow{r_{vv}} = -u\cos v \overrightarrow{i} - u \sin v \overrightarrow{j},$$

$$L = \overrightarrow{r_{uu}}\overrightarrow{n} = 0, M = \overrightarrow{r_{uv}}\overrightarrow{n} = -\frac{a}{(a^2+u^2)^{1/2}}, N = \overrightarrow{r_{vv}}\overrightarrow{n} = 0.$$

Curburile principale sunt date de ecuaţia

$$\begin{vmatrix} -C & -\frac{a}{(a^2+u^2)^{1/2}} \\ -\frac{a}{(a^2+u^2)^{1/2}} & -C(a^2+u^2) \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$C_{1,2} = \pm\frac{a}{a^2+u^2}.$$

Curbura totală este negativă

$$K = -\frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}$$

în timp ce curbura medie este nulă.

5.2.7 Formulele de derivare

In fiecare punct al suprafeţei parametrizate $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v), (u,v) \in D_{uv}$ avem un triedru $\overrightarrow{r_u}(u,v)$, $\overrightarrow{r_v}(u,v)$, $\overrightarrow{n}(u,v)$. Vom avea formule analoage formulelor lui Frenet care vor exprima derivatele vectorilor acestui triedru

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r_{uu}} &= \Gamma^1_{11}\overrightarrow{r_u} + \Gamma^2_{11}\overrightarrow{r_v} + L\overrightarrow{n}, \\
\overrightarrow{r_{uv}} &= \Gamma^1_{12}\overrightarrow{r_u} + \Gamma^2_{12}\overrightarrow{r_v} + M\overrightarrow{n}, \\
\overrightarrow{r_{vv}} &= \Gamma^1_{22}\overrightarrow{r_u} + \Gamma^2_{22}\overrightarrow{r_v} + N\overrightarrow{n}, \\
\overrightarrow{n_u} &= a^1_1\overrightarrow{r_u} + a^2_1\overrightarrow{r_v}, \\
\overrightarrow{n_v} &= a^1_2\overrightarrow{r_u} + a^2_2\overrightarrow{r_v}.
\end{aligned}$$

Se poate arăta că toţi coeficienţii Γ^k_{ij}, numiţi *coeficienţii lui Cristophel de speţa a doua,* se exprimă prin coeficienţii primei forme pătratice E, F, G. De exemplu, pentru cei de pe prima linie se poate scrie

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r_{uu}}\overrightarrow{r_u} &= \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F = \frac{1}{2}E_u, \\
\overrightarrow{r_{uu}}\overrightarrow{r_v} &= \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = F_u - \frac{1}{2}E_v.
\end{aligned}$$

Rezultă

$$\Gamma^1_{11} = \frac{E_uG - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, \Gamma^2_{11} = \frac{-E_uF + 2EF_v - EE_v}{2(EG-F^2)}.$$

In cazul în care prima formă pătratică este

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$$

singurii coeficienţi Γ_{ij}^k nenuli sunt

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G_u, \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

In ce priveşte coeficienţii a_i^j vom observa că prin înmulţire scalară cu $\overrightarrow{r_v}, \overrightarrow{r_v}$ avem

$$-\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Dacă liniile coordonate sunt linii principale $F = M = 0$ atunci au loc formulele lui Rodrigues

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n_u} &= -\frac{L}{E}\overrightarrow{r_u} = -C_1\overrightarrow{r_u}, \\ \overrightarrow{n_v} &= -\frac{N}{G}\overrightarrow{r_v} = -C_2\overrightarrow{r_v}, \end{aligned}$$

C_1, C_2 fiind curburile principale.

Dacă punctul $\overrightarrow{r}(u,v)$ descrie o suprafaţă parametrizată, versorul normalei $\overrightarrow{n}(u,v)$ dispus în origine descrie o suprafaţă numită imaginea sferică a suprafeţei date. Cum

$$|\overrightarrow{n_u} \times \overrightarrow{n_v}| = K|\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|$$

rezultă între elementul de arie $d\sigma$ al suprafeţei parametrizate şi elementul de arie $d\Sigma$ al imaginii sferice există relaţia $d\Sigma = Kd\sigma$ şi deci are loc

Teorema 5.2.4 *a lui Gauss. Limita raportului dintre aria unei porţiuni a imaginii sferice şi aria porţiunii corespunzătoare a suprafeţei când porţiunea se strânge la un punct este curbura totală în acel punct.*

Teorema lui Gauss este analogul relaţiei care dă curbura curbei plane $C = \frac{d\theta}{ds}$.

In legătură cu curbura totală, Gauss a demonstrat ceea ce el a numit 'teorema egregium', teorema minunată: curbura totală ţine de geometria intrinsecă a suprafeţei, adică se exprimă numai prin coeficienţii primei forme fundamentale.

5.2.8 Curbura geodezică, geodezice

Din prima formulă a lui Darboux

$$\overrightarrow{\tau'}(s) = C_n(s)\overrightarrow{n}(s) - C_g(s)\overrightarrow{g}(s)$$

rezultă pentru curbura geodezică expresia

$$C_g(s) = -\overrightarrow{\tau'}(s)\overrightarrow{g}(s) = -\overrightarrow{\tau'}(s)(\overrightarrow{\tau}(s) \times \overrightarrow{n}(s)).$$

Mai putem scrie

$$-C_g(s)\overrightarrow{g}(s) = \overrightarrow{\tau'}(s) - C_n(s)\overrightarrow{n}(s).$$

Pe de altă parte

$$\overrightarrow{\tau'}(s) = \frac{d^2\overrightarrow{r}}{ds^2} = \overrightarrow{r_{uu}}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\overrightarrow{r_{uv}}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \overrightarrow{r_{vv}}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \overrightarrow{r_u}\frac{d^2u}{ds^2} + \overrightarrow{r_v}\frac{d^2v}{ds^2}$$

sau după formulele de derivare

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\tau'}(s) &= \left(\Gamma_{11}^1\overrightarrow{r_u} + \Gamma_{11}^2\overrightarrow{r_v} + L\overrightarrow{n}\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left(\Gamma_{12}^1\overrightarrow{r_u} + \Gamma_{12}^2\overrightarrow{r_v} + M\overrightarrow{n}\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \\ &+ \left(\Gamma_{22}^1\overrightarrow{r_u} + \Gamma_{22}^2\overrightarrow{r_v} + N\overrightarrow{n}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \overrightarrow{r_u}\frac{d^2u}{ds^2} + \overrightarrow{r_v}\frac{d^2v}{ds^2}.\end{aligned}$$

Notând

$$\begin{aligned}P &= \Gamma_{11}^1\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \Gamma_{12}^1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2, \\ Q &= \Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \Gamma_{12}^2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\end{aligned}$$

avem

$$-C_g(s)\overrightarrow{g}(s) = \left(\frac{d^2u}{ds^2} + P\right)\overrightarrow{r_u} + \left(\frac{d^2v}{ds^2} + Q\right)\overrightarrow{r_v}.$$

Inmulţind vectorial cu $\overrightarrow{\tau}(s) = \overrightarrow{r_v}\frac{du}{ds} + \overrightarrow{r_v}\frac{dv}{ds}$ rezultă expresia curburii geodezice

$$C_g(s) = \sqrt{EG - F^2}\left[\left(\frac{d^2v}{ds^2} + Q\right)\frac{du}{ds} - \left(\frac{d^2u}{ds^2} + P\right)\frac{dv}{ds}\right].$$

Curbura geodezică este obiect de geometrie intrinsecă pentru că se exprimă numai prin coeficienţii primei forme fundamentale.

In cazul în care prima formă fundamentală este

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$$

expresia curburii geodezice este

$$C_g(s) = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)^{3/2}} \left[(v''u' - u''v') + \frac{1}{2} G_u v'^3 + \frac{G_v}{2G} u'v'^2 + \frac{G_u}{G} u'^2 v' \right].$$

In cazul planului, curbura geodezică coincide cu curbura obişnuită.

Definiţia 5.2.13 *O curbă de pe suprafaţa parametrizată se numeşte curbă geodezică dacă în toate punctele sale curbura geodezică este nulă.*

Evident au loc

Teorema 5.2.5 *O curbă $\overrightarrow{r_v} = \overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{r_v}(u(s), v(s))$ de pe suprafaţa parametrizată este curbă geodezică dacă şi numai dacă $\overrightarrow{\rho''}(s) \left(\overrightarrow{\rho'}(s) \times \overrightarrow{n}(u(s), v(s)) \right) = 0$.*

Teorema 5.2.6 *O curbă $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{r}(u(s), v(s))$ de pe suprafaţa parametrizată este curbă geodezică dacă şi numai dacă vectorul său acceleraţie $\overrightarrow{\rho''}(s)$ este perpendicular pe planul tangent la suprafaţă în fiecare punct al curbei.*

Cu notaţiile de mai sus, are loc teorema

Teorema 5.2.7 *Curba $u = u(s), v = v(s)$ de pe suprafaţă este geodezică dacă şi numai dacă au loc relaţiile*

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} + P &\equiv \frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma^1_{11} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \Gamma^1_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma^1_{22} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0, \\ \frac{d^2v}{ds^2} + Q &\equiv \frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma^2_{11} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \Gamma^2_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma^2_{22} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Din proprietăţile sistemelor de ecuaţii diferenţiale rezultă

Teorema 5.2.8 *Prin fiecare punct ordinar al suprafeţei în orice direcţie dată trece o curbă geodezică şi numai una.*

Exemplul 5.2.8.1 *Considerăm cilindrul circular drept*

$$\overrightarrow{r} = R \cos \frac{u}{R} \overrightarrow{i} + R \sin \frac{u}{R} \overrightarrow{j} + v \overrightarrow{k}, (u, v) \in [0, 2\pi R] \times \mathbf{R}.$$

Prima formă fundamentală fiind $ds^2 = du^2 + dv^2$ geodezicele sunt date de ecuaţiile $u'' = 0, v'' = 0$, adică $u = \alpha s + \beta, v = \gamma s + \delta$. Geodezicele sunt elicele de pe cilindru.

Definiţia 5.2.14 *Parametrii u, v ai unei suprafeţe se numesc parametrii semigeodezici dacă prima formă fundamentală este*

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2.$$

Parametrii semigeodezici sunt caracterizaţi de următoarele proprietăţi:

- curbele parametrice sunt ortogonale;
- curbele parametrice $v = v_0$ sunt curbe geodezice.

Se poate demonstra următoarea teoremă

Teorema 5.2.9 *Pentru orice curbă C de pe suprafaţa parametrizată şi orice punct P_0 de pe această curbă există o vecinătate a acestui punct şi un sistem de parametrii semigeodezici u, v astfel încât curba C este curba $u = 0$ şi punctul P_0 corespunde parametrilor $u = 0, v = 0$.*

Alături de punctul P_0 dat de teorema precedentă considerăm punctul Q_0 corespunzător parametrilor $u = u_0, v = 0$, u_0 fiind lungimea l a arcului de geodezică care uneşte pe P_0 cu Q_0. O altă curbă oarecare care uneşte pe P_0 cu Q_0 va avea ecuaţiile $u = u$, $v = f(u)$, $u \in [0, u_0]$, $f'(u) \neq 0$. Lungimea acestei curbe va fi

$$L = \int_0^{u_0} \sqrt{1 + G(u, f(u))f'(u)^2}du > \int_0^{u_0} du = u_0 = l.$$

Deci are loc

Teorema 5.2.10 *Arcul geodezicei care uneşte două puncte P_0, Q_0 are lungimea cea mai mică faţă de orice curbă care uneşte cele două puncte, dacă punctele sunt suficient de apropiate.*

Considerăm un punct material care este obligat să se deplaseze pe suprafaţă fără forţe exterioare. Vom putea scrie ecuaţia

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = R\overrightarrow{n} - \mu|R|\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$$

unde R este mărimea reacţiunii normale a suprafeţei, μ este coeficientul de frecare. Inmulţind scalar cu $\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \times \overrightarrow{n}$ rezultă $\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \times \overrightarrow{n}\right) = 0$, adică punctul material se

mişcă de-a lungul unei geodezice a suprafeţei. Se poate arăta că dacă un fir cu greutate neglijabilă este întins pe o suprafaţă, fără a acţiona alte forţe asupra lui, firul se dispune după o geodezică a suprafeţei.

Geodezicele pe o suprafaţă oarecare sunt analoagele dreptelor dintr-un plan.

5.2.9 Formulele lui Gauss-Bonnet

Pe o suprafaţă parametrizată $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(u,v)$, $(u,v)\in D_{uv}$ considerăm o curbă închisă C. Presupunem că parametrii pe suprafaţă sunt semigeodezici

$$ds^2=du^2+G(u,v)dv^2, \overrightarrow{r_u}^2=1, \overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v}=0, \overrightarrow{r_v}^2=G(u,v).$$

Primele trei formule de derivare sunt

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r_{uu}} &= L\overrightarrow{n},\\
\overrightarrow{r_{uv}} &= \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}\overrightarrow{r_v}+M\overrightarrow{n},\\
\overrightarrow{r_{vv}} &= -\frac{1}{2}G_u\overrightarrow{r_u}+\frac{1}{2}\frac{G_v}{G}\overrightarrow{r_v}+N\overrightarrow{n}
\end{aligned}$$

iar curbura totală este

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}.$$

Notăm cu θ unghiul făcut de versorul $\overrightarrow{\tau}$ al tangentei la curbă cu versorul $\overrightarrow{r_v}$. Vom avea

$$\overrightarrow{\tau}=\overrightarrow{r_u}\cos\theta+\frac{\overrightarrow{r_v}}{\sqrt{G}}\sin\theta.$$

Versorul geodezic $\overrightarrow{g}$ va fi

$$\overrightarrow{g}=\overrightarrow{r_u}\sin\theta-\frac{\overrightarrow{r_v}}{\sqrt{G}}\cos\theta.$$

Calculând diferenţiala versorului $\overrightarrow{\tau}$ şi folosind formulele de derivare găsim

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{\tau} &= -\overrightarrow{g}d\theta+\cos\theta(L\overrightarrow{n}du+\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}\overrightarrow{r_v}dv+M\overrightarrow{n}dv)+\\
&+\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}(M\overrightarrow{n}du-\frac{1}{2}G_u\overrightarrow{r_u}dv+N\overrightarrow{n}dv).
\end{aligned}$$

Ţinând cont de prima formulă a lui Darboux rezultă

$$-C_g ds+d\theta=-\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{G}}dv.$$

Considerăm că baza $\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{n}$ este orientată la dreapta. Integrând de-a lungul curbei închise C în sens direct, avem

$$-\int_C C_g ds + \int_C d\theta = -\frac{1}{2}\int_C \frac{G_u}{\sqrt{G}} dv = -\frac{1}{2}\iint_{D'_{uv}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{G}}\right) dudv = \iint_S -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} d\sigma$$

adică formula lui Gauss-Bonnet

$$\int_C d\theta = \int_C C_g ds + \iint_S K d\sigma,$$

S fiind suprafaţa limitată de curba închisă C.

Dacă curba C este netedă atunci formula lui Gauss-Bonnet devine

$$2\pi = \int_C C_g ds + \iint_S K d\sigma.$$

Dacă curba C este un triunghi $A_1A_2A_3$ parcurs în sens direct, notăm

$$\int_{A_1A_2} d\theta = \varphi_1, \int_{A_2A_3} d\theta = \varphi_2, \int_{A_3A_1} d\theta = \varphi_3.$$

La pornirea din A_1 unghiul θ este θ_0; ajungem în faţa lui A_2 cu valoarea lui θ egală cu $\theta_0 + \varphi_1$; tangenta rotindu-se în A_2 cu $\theta_2 = \pi - \delta_2$, δ_2 unghiul interior al triunghiului, plecăm mai departe cu valoarea lui θ egală cu $\theta_0 + \varphi_1 + \theta_2$; ajungem în faţa lui A_3 cu valoarea lui θ egală cu $\theta_0 + \varphi_1 + \theta_2 + \varphi_2$; tangenta se roteşte în A_3 cu $\theta_3 = \pi - \delta_3$, δ_3 unghiul interior al triunghiului, plecăm mai departe cu valoarea $\theta_0 + \varphi_1 + \theta_2 + \varphi_2 + \theta_3$; ajungem în faţa lui A_1 cu valoarea $\theta_0 + \varphi_1 + \theta_2 + \varphi_2 + \theta_3 + \varphi_3$ egală evident cu $\theta_0 + 2\pi$. Rezultă

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = -\pi + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

şi formula lui Gauss-Bonnet devine

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \pi + \int_{A_1A_2A_3A_1} C_g ds + \iint_{A_1A_2A_3} K d\sigma.$$

Dacă triunghiul este geodezic $C_g = 0$ şi avem

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \pi + \iint_{A_1A_2A_3} K d\sigma.$$

Diferenţa $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - \pi$ se numeşte excesul triunghiului geodezic. El este pozitiv dacă curbura este pozitivă, este cazul sferei.

Index